Beiträge zur Kenntnis der infinitesimalen Deformationen einer Fläche.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät, Sektion II

der Ludwig-Maximilians-Universität

zu München

am 4. Februar 1907 vorgelegt von

HUGO DINGLER

aus Aschaffenburg.

AMORBACH

Gottlob Volkhardt'sche Druckerei

1907.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552325_0036

Inhalt.

p. 1. Einleitung.
p. 5. § 1. Allgemeines.
p. 9. § 2. Die Variationen der Fundamentalgrößen in den λ, μ, ν.
p. 20. § 3. Die Variationen von K und H.
p. 30. § 4. Fortsetzung.
p. 44. § 5. Die Kurven ohne Verschiebung bei isometrischer Deformation.
p. 49. § 6. Die Kurven ohne Verschiebung bei der allgemeinen Deformation.
p. 54. § 7. Die Differentialgleichungen der Deformationskurvensysteme und spezielle Flächendeformationen.

Einleitung.

Die Untersuchungen über die unendlich kleinen Verbiegungen von Flächen bildeten die Vorstufe für die Untersuchung von unendlich kleinen Deformationen allgemeinster Art. Denken wir uns die Fläche:

1) $$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

der Transformation:

2) $$\begin{aligned} \bar{x} &= x + t x_1 + t^2 x_2 + \ldots . \\ \bar{y} &= y + t y_1 + t^2 y_2 + \ldots . \\ \bar{z} &= z + t z_1 + t^2 z_2 + \ldots . \end{aligned}$$

wo die x_i, y_i, z_i Funktionen von u und v darstellen und t einen Parameter bedeutet, unterworfen, so ist im Falle einer infinitesimalen Deformation t als unendlich klein zu betrachten.

Seien $\delta(E)$, $\delta(F)$, $\delta(G)$ die Aenderungen, welche die Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Fläche 1) durch die Transformation 2) erleiden, so heben sich zunächst zwei besondere Fälle aus der allgemeinen infinitesimalen Deformation heraus:

1) Verschwinden $\delta(E)$, $\delta(F)$, $\delta(G)$ identisch, dann sprechen wir von einer infinitesimalen Biegung.

2) Verschwinden dagegen in der Entwickelung von $\delta(E)$, $\delta(F)$ $\delta(G)$ nach Potenzen der infinitesimalen Größe t

nur die jedesmaligen Koeffizienten von t, während über die Koeffizienten der höheren Potenzen von t nichts ausgesagt ist, dann sprechen wir von einer infinitesimalen Isometrie.

Waren bisher lediglich die beiden genannten Fälle der infinitesimalen Deformation behandelt worden, so begann Herr Professor Voss im Jahre 1895 mit Untersuchungen über die allgemeinste infinitesimale Deformation*). Später veröffentlichte E. Daniële**) weitere Arbeiten über diesen Gegenstand. Ebenso, wie Herr Professor Voss dies schon 1895 tat, ging Daniële darauf aus, im Anschlusse an die Weingarten'schen Untersuchungen über die unendlich kleinen Isometrieen der Flächen, die Differentialgleichung für die Weingarten'sche charakteristische Funktion auf den allgemeinen Fall auszudehnen.

In einer neueren Abhandlung von Herrn Professor Voss***) wird nun eine gewisse Behandlungsweise des Problems der allgemeinen infinitesimalen Deformation****) zu Untersuchungen angewandt, welche erlauben, eine Reihe von Fragen der in Rede stehenden Theorie einer weitergehenden Bearbeitung zugänglich zu machen.

Unsere Aufgabe im Folgenden soll es sein, diese Behandlungsweise des Problemes zu einigen weiteren Untersuchungen nutzbar zu machen.

---

*) Jahresber. d. d. Math. Vergg. Bd. 4, 1895, p. 132.

**) »Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili«. Memorie della R. Acc. di Torino. Serie II. t. L. 1901. p. 25—62, sowie »Sulla deformazione infinitesima delle superficie di 2^0 grado«. Atti della R. Acc. di Torino. tom. XXXVI 1900—01, p. 837—860.

***) »Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche«. Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der K. bayr. Akademie der Wissenschaften 1904, p. 141—199. (Im Folgenden zitiert als »Voss 1904«).

****) Die sich übrigens auch bei Daniële (in der ersten der beiden soeben genannten Abhandlungen) angedeutet findet.

Insbesondere werden wir uns dabei auch mit der wichtigen Frage nach den Variationen, welche die Gauss'sche und die mittlere Krümmung einer Fläche bei einer infinitesimalen Deformation erleiden, zu beschäftigen haben. —

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Voss, der mir die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gab, und mir auch während der Ausführung derselben mit wohlwollendem Rate zur Seite stand, erlaube ich mir hiefür meinen besten Dank auszusprechen. —

§ 1. Allgemeines.

Verlangen wir, daß die Transformation:

$$1) \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t\xi + t^2\xi_1 + \ldots . \\ \bar{y} &= y + t\eta + t^2\eta_1 + \ldots . \\ \bar{z} &= z + t\zeta + t^2\zeta_1 + \ldots . \end{aligned}$$

aus der gegebenen Fläche

$$2) \qquad x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

eine stetige Schaar von Biegungen hervorgehen lasse, so liefert das die Bedingung:

$$3) \qquad d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

d. h. es müssen die Koeffizienten von t, t^2 etc. auf der linken Seite dieser Gleichung einzeln verschwinden. Dies gibt die Gleichungen:*)

$$\Sigma\, dx\, d\xi = 0$$

$$\Sigma\, dx\, d\xi_1 + \tfrac{1}{2}\Sigma\, d\xi^2 = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma\, dx\, d\xi_{n-1} + \Sigma\, d\xi\, d\xi_{n-2} + \ldots . = 0.$$

Wählt man nun statt der allgemeinen Deformation 1) eine solche, die nur die erste Potenz von t enthält:

---

*) Darboux »Leçons sur la théorie générale des surfaces« IV, p. 2.

$$4) \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= x + t\,\xi \\ \bar{y} &= y + t\,\eta \\ \bar{z} &= z + t\,\zeta, \end{aligned}$$

so kann man zunächst fragen, wann eine Transformation von der Gestalt 4) eine stetige Biegungsschaar liefert. Es ist aus 4):

$$\Sigma\, d\,\bar{x}^2 = \Sigma\, d\,x^2 + 2\,t\,\Sigma\, d\,x\, d\,\xi + t^2\,\Sigma\, d\,\xi^2.$$

Die Bedingung 3) liefert uns dann folgende sechs Gleichungen, die identisch bestehen müssen:

$$5) \qquad \begin{aligned} &\Sigma\, x_u\,\xi_u = 0 && \Sigma\,\xi_u^2 = 0 \\ &\Sigma\, x_u\,\xi_v + \Sigma\, x_v\,\xi_u = 0 && \Sigma\,\xi_u\,\xi_v = 0 \\ &\Sigma\, x_v\,\xi_v = 0 && \Sigma\,\xi_v^2 = 0, \end{aligned}$$

wo x_u für $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ steht etc.

Man erkennt sofort, daß der einzige reelle Fall, in dem die Transformation 4) eine stetige Biegungsschaar liefert, gegeben ist durch:

$$\xi_u = \eta_u = \zeta_u = \xi_v = \eta_v = \zeta_v = 0,$$

d. h.

$$\xi = c_1; \quad \eta = c_2; \quad \zeta = c_3,$$

wo die c_i Konstante bedeuten: es ist der Fall der Translation der Fläche im Raume*). —

Anders liegen natürlich die Verhältnisse, wenn wir $t = \varepsilon$ so klein wählen, daß seine höheren Potenzen als die ersten vernachläßigt werden

---

*) Es ist leicht zu zeigen, daß auch im Falle einer imaginären Deformation das System 5) keine andere Lösung zuläßt, als die angegebene.

können. Wir haben dann eine »infinitesimale Deformation« der Fläche. Es besteht dann in unseren Rechnungen stets nur eine Genauigkeit bis auf Glieder mit ε^2 etc., wir können also die Veränderung, welche ein auf die Fläche bezüglicher analytischer Ausdruck durch die Deformation erleidet, als dessen erste Variation ansehen.

Sind die Koordinaten der deformierten Fläche:

$$6) \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= x + \varepsilon \xi \\ \bar{y} &= y + \varepsilon \eta \\ \bar{z} &= z + \varepsilon \zeta, \end{aligned}$$

wo die ξ, η, ζ Funktionen von u und v bedeuten, dann haben wir als Quadrat des Linienelementes der deformierten Fläche:

$$\bar{ds}^2 = ds^2 + 2\varepsilon [\Sigma x_u \xi_u du^2 + \Sigma (x_v \xi_u + x_u \xi_v) du\, dv + \Sigma x_v \xi_v dv^2].$$

Es sind dann also die Variationen der Fundamentalgrößen 1. Ordnung:

$$7) \qquad \begin{aligned} \delta E &= 2 \Sigma x_u \xi_u = 2 P \\ \delta F &= \Sigma x_u \xi_v + \Sigma x_v \xi_u = 2 Q \\ \delta G &= 2 \Sigma x_v \xi_v = 2 R. \end{aligned}$$

Wir werden im Folgenden den infinitesimalen Faktor ε bei den Variationsformeln als selbstverständlich stets fortlassen. Ebenso werden wir, wo wir von Deformationen schlechtweg reden, stets eine infinitesimale Deformation meinen.

Die Aufgabe, welche die allgemeine infinitesimale Deformation stellt, ist dann die, zu gegebenen P, Q, R die zugehörigen ξ, η, ζ aus dem Gleichungssystem 7) zu bestimmen. Ein Spezialfall dieser Aufgabe ist die Untersuchung der infinitesimalen isometrischen Deformation, welche $P = Q = R = 0$ voraussetzt.

Ist nun ξ', η', ζ', eine partikuläre Lösung des Systems 7) bei vorgegebenen P, Q, R, so muß sein:

$$\Sigma x_u \xi_u = \Sigma x_u \xi'_u$$
$$\Sigma x_u \xi_v + \Sigma \xi_u x_v = \Sigma x_u \xi'_v + \Sigma \xi'_u x_v$$
$$\Sigma x_v \xi_v = \Sigma x_v \xi'_v,$$

oder:

$$\Sigma x_u \cdot \frac{\partial}{\partial u}(\xi - \xi') = 0$$

$$\Sigma x_u \frac{\partial}{\partial v}(\xi - \xi') + \Sigma x_v \frac{\partial}{\partial u}(\xi - \xi') = 0$$

$$\Sigma x_v \frac{\partial}{\partial v}(\xi - \xi') = 0,$$

d. h. wir haben den Satz:

Ist eine partikuläre Lösung ξ', η', ζ' des Systems 7) bekannt, so reduziert sich das Problem auf die isometrische Deformation. —

Wir setzen dann:

$$8) \qquad \begin{aligned} \xi &= \lambda x_u + \mu x_v + \nu X \\ \eta &= \lambda y_u + \mu y_v + \nu Y \\ \zeta &= \lambda z_u + \mu z_v + \nu Z, \end{aligned}$$

wo die X, Y, Z die Richtungscosinusse der Flächennormalen bedeuten.

Ferner setzen wir:

$$\Sigma \xi x_u = \lambda E + \mu F = \rho; \quad \Sigma \xi x_v = \lambda F + \mu G = \sigma,$$

ρ und σ heißen die »reduzierten Vektorkomponenten« *).

Auf ihre Bedeutung, sowie auf die der λ, μ, ν, werden wir in § 7 einzugehen haben.

Wir bezeichnen ferner mit D, D', D'' die Fundamentalgrößen 2. Ordnung einer Fläche; mit e, f, g die Funda-

*) Voss 1904, p. 187.

mentalgrößen der sphärischen Abbildung, mit K die Gauss'sche, mit H die mittlere Krümmung.

Wir setzen:

$$\Delta^2 = E\,G - F^2;$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\} = A \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} = A_1 \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} = B \quad \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} = B_1$$

$$\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} = C \quad \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} = C_1.$$

Von den Codazzischen Gleichungen benutzen wir die beiden ersten in der Form:

$$D_v - D'_u - B\,D + (A - B_1)\,D' + A_1\,D'' = 0$$
$$D''_u - D'_v - B_1\,D'' + (C_1 - B)\,D' + C\,D = 0,$$

während die dritte:

$$K = \frac{D\,D'' - D'^2}{E\,G - F^2}$$

ist.

---

§ 2. Die Variationen der Fundamentalgrössen in den λ, μ, ν.

Setzen wir die Werte der ξ_u, ξ_v etc. aus 8) in die Gleichungen 7) des vorigen § ein, dann erhalten wir als Variationen der Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Fläche:

$$\delta E = 2P = \lambda E_u + \mu E_v + \lambda_u \cdot 2E + \mu_u \cdot 2F - 2\nu D$$

1) $$\delta F = 2Q = \lambda F_u + \mu F_v + \lambda_u \cdot F + \mu_u \cdot G + \lambda_v \cdot E + \mu_v \cdot F - 2\nu D'$$

$$\delta G = 2R = \lambda G_u + \mu G_v + \lambda_v \cdot 2F + \mu_v \cdot 2G - 2\nu D''.$$

Setzen wir hier $P = Q = R = 0$, so erhalten wir die Bedingungen für die isometrische Deformation.

Um die allgemeinen sowie die isometrischen Deformationen sämtlich zu bestimmen, wäre es nun das Einfachste, das System 1) zu integrieren. Es ist dies ein System von 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, daher unbeschränkt integrierbar. Setzen wir dann die erhaltenen λ, μ, ν in die Gleichungen 8) des vorigen § ein, so haben wir damit die gewünschten Deformationen explizit dargestellt.

Die Auflösung des Systems 1) nach den λ, μ, ν erscheint nun nur in wenigen Fällen möglich. Zum Beispiel läßt es sich vollständig und mittels Quadraturen sofort integrieren für den Fall der Kugel.

In der Tat, sei diese auf ein Isothermensystem bezogen, dann ist $E = G$, $F = 0$, $D = kE$, $D' = 0$, $D'' = kE$, wo k^2 das Krümmungsmaß bedeutet. Wir haben aus 1):

$$\begin{aligned} \lambda E_u + \mu E_v + \lambda_u \cdot 2E &= 2\nu k E \\ \mu_u E + \lambda_v E &= 0 \\ \lambda E_u + \mu E_v + \mu_v \cdot 2E &= 2\nu k E. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir die erste und letzte dieser Gleichungen, so haben wir zur Bestimmung von λ und μ:

$$\begin{aligned} \lambda_u - \mu_v &= 0 \\ \lambda_v + \mu_u &= 0. \end{aligned}$$

Setzen wir wegen der ersten:

$$\lambda = \Phi_v, \quad \mu = \Phi_u,$$

so wird die zweite:

$$\Phi_{vv} + \Phi_{uu} = 0,$$

d. h. $\Phi = f(u + iv) + g(u - iv)$ wo f und g beliebige Funktionen ihres Argumentes bedeuten.

Es kommt so:

$$\lambda = i\,(f' - g')$$

$$\mu = f' + g'$$

$$\nu = \frac{1}{2\,k\,E}\left\{ i\,E_u\,(f' - g') + E_v\,(f' + g') + 2\,i\,E\,(f'' - g''),\right\}$$

womit sämtliche Isometrieen der Kugel in endlicher Form vorliegen*), (dabei deuten die Akzente an f und g die Differentiation nach dem Argumente an).

Weitere Fälle der Integrierbarkeit des Systems 1) in etwas veränderter Gestalt, werden später besprochen werden. —

Suchen wir die Komponente der Deformation 8) (in § 1) längs der Normalen, so wird diese:

$$\Sigma\,\xi\,X = \nu$$

d. h. wir sind durch Einführung der λ, μ, ν in der Lage, die Deformation in eine solche längs der Normalen, und eine in der Fläche selbst zu zerlegen.

Betrachten wir in diesem Sinne die Gleichungen 1) für eine Deformation längs der Normalen ($\lambda = \mu = 0$), so kommt:

$$2\,P = -\,2\,\nu\,D;\quad 2\,Q = -\,2\,\nu\,D';\quad 2\,R = -\,2\,\nu\,D''.$$

Da hier also:

$$\delta\,ds^2 = -\,2\,\varepsilon\nu\,(D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2),$$

so zeigt sich, daß bei dieser Deformation die Haupttangentenkurven ihre Länge nicht ändern (bis auf Glieder in ε^2 etc.).**)

---

*) Auf andere Weise hat Voss (1904, p. 193) sämtliche Isometrieen der Kugel bestimmt, siehe ferner Darboux schon 1895 (Théorie des surfaces III, p. 97 ff).

**) Wie wir schon in § 1 ausgeführt haben, gelten unsere Rechnungen stets nur »bis auf Glieder in ε^2 etc.«. Da dies selbstverständlich ist, werden wir diesen Zusatz im Folgenden stets weglassen. Von einer geometrischen Eigenschaft, welche »bis auf Glieder in ε^2 etc.« gilt, wollen wir sagen, daß sie »infinitesimal« gelte; sind z. B. zwei Flächen bis auf Glieder in ε^2 etc. kongruent, so wollen wir sie als »infinitesimal kongruent« bezeichnen.

Ferner zeigen die angeschriebenen 3 Gleichungen, daß für den Fall der isometrischen Deformation ($P = Q = R = 0$) die Ebene*), für den Fall der konformen Deformation $\left(\frac{P}{E} = \frac{Q}{F} = \frac{R}{G} = \tau\right)$ die Kugel die einzige Fläche ist, die eine solche längs der Normalen zuläßt.

Im Falle einer Deformation der Fläche in sich ergeben die Gleichungen 1), falls wir die Fläche auf ihre Minimalkurven als Parameterlinien beziehen:

$$\mu_u \cdot 2F = 2P$$
$$\lambda F_u + \mu F_v + \lambda_u F + \mu_v F = 2Q$$
$$\lambda_v \cdot 2F = 2R.$$

Die erste und letzte liefert λ und μ, die mittlere Gleichung wird bei vorgegebenen P, Q, R eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für F. Die konformen Deformationen einer Fläche in sich hat Voss**) angegeben. —

Wir können nun mittels der Gleichungen 8) des vorigen § die Variationen auch anderer auf die Fläche bezüglicher Ausdrücke in den λ, μ, ν darstellen, welche also bei Kenntnis dieser λ, μ, ν unmittelbar die Variationen anzugeben erlauben.

Zunächst ergibt sich aus den Formeln 1) unmittelbar die Variation des Flächeninhaltes eines infinitesimalen Parallelogramms von Parameterkurven:

$$2) \quad \delta(\Delta^2) = \lambda \frac{\partial \Delta^2}{\partial u} + \mu \frac{\partial \Delta^2}{\partial v} + 2\lambda_u \Delta^2 + 2\mu_v \Delta^2 - 2\nu \Delta^2 H.$$

Für $H \neq 0$ können wir gemäß dieser Formel sofort alle diejenigen infinitesimalen Deformationen angeben, bei welchen die Variation des Flächeninhaltes verschwindet. Wählt man nämlich λ und μ als beliebige Funktionen von u und v, so

*) Daniële, Mem. di Torino l. c., p. 60, Anm.
**) 1904, p. 176.

ergibt sich ν sofort aus der Gleichung $\delta(\Delta^2) = 0$. Im Falle der Minimalflächen jedoch bedarf es hiezu einer Quadratur, nachdem λ und μ beliebig gewählt ist — während ν völlig willkürlich bleibt, was mit dem Umstande zusammenfällt, daß für eine Deformation der Minimalfläche längs der Normalen ($\lambda = \mu = 0$) $\delta(\Delta^2)$ identisch verschwindet, wie dies unmittelbar aus Formel 2) erhellt.

Um ferner die Variationen der Fundamentalgrößen 2. Ordnung zu ermitteln, wollen wir uns der Abkürzung:

$$| x_{uu}\ x_u\ x_v | = \begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix}$$

bedienen, sowie der analogen für alle ähnlich gebauten dreizeiligen Determinanten. Es ist demnach:

$$\Delta D = | x_{uu}\ x_u\ x_v | \qquad \Delta D' = | x_{uv}\ x_u\ x_v |$$
$$\Delta D'' = | x_{vv}\ x_u\ x_v |$$

Es wird dann z. B.:

$$\delta(\Delta D) = | \delta x_{uu}\ x_u\ x_v | + | x_{uu}\ \delta x_u\ x_v | + | x_{uu}\ x_u\ \delta x_v |$$

wo $\delta x_{uu} = \xi_{uu}$ etc. aus 8) (§ 1) zu berechnen sind. Die bei dieser, sowie bei der analogen Rechnung für $\delta(\Delta D')$ und $\delta(\Delta D'')$ auftretenden Determinanten haben folgende Werte:

$$| X\ x_u\ x_v | = 0$$
$$| X_u\ x_u\ x_v | = 0$$
$$| X_v\ x_u\ x_v | = 0$$
$$| X_{uu}\ x_u\ x_v | = -\Delta e$$
$$| X_{uv}\ x_u\ x_v | = -\Delta f$$
$$| X_{vv}\ x_u\ x_v | = -\Delta g$$
$$| X\ x_{uu}\ x_u | = -\Delta A_1$$
$$| X\ x_{uu}\ x_v | = \Delta A$$
$$| X\ x_{uv}\ x_u | = -\Delta B_1$$

$$| X \quad x_{uv} \, x_u | = \Delta B$$
$$| X \quad x_{vv} \, x_u | = - \Delta C_1$$
$$| X \quad x_{vv} \, x_v | = \Delta C$$
$$| X_u \, x_{uu} \, x_v | = \frac{D}{\Delta} (G D - F D') = - D L \Delta$$
$$| X_v \, x_{uu} \, x_u | = \frac{D}{\Delta} (F D' - E D'') = D M_1 \Delta$$
$$| X_u \, x_{uv} \, x_v | = - D' L \Delta$$
$$| X_v \, x_{uv} \, x_u | = D' M_1 \Delta$$
$$| X_u \, x_{vv} \, x_v | = - D'' L \Delta$$
$$| X_v \, x_{vv} \, x_u | = D'' M_1 \Delta^*).$$

Führen wir diese Werte in die Ausdrücke für $\delta(\Delta D)$ etc. ein, so erhalten wir aus:

$$\delta D = \frac{\delta(\Delta D)}{\Delta} - D \frac{\delta \Delta}{\Delta}$$

unter Benutzung von 2) schließlich:

$$\delta D = \lambda D_u + \mu D_v - \nu e + \lambda_u \cdot 2 D + \mu_u \cdot 2 D' - \nu_u A - \nu_u A_1 + \nu_{uu}$$

3) $$\delta D' = \lambda D'_u + \mu D'_v - \nu f + \lambda_u D' + \mu_u D'' + \lambda_v D + \mu_v D' - \nu_u B - \nu_v B_1 + \nu_{uv}$$

$$\delta D'' = \lambda D''_u + \mu D''_v - \nu g + \lambda_v \cdot 2 D' + \mu_v \cdot 2 D'' - \nu_u C - \nu_v C_1 + \nu_{vv}.$$

Da nunmehr die Variationen der Fundamentalgrößen bekannt sind, so können wir die Frage untersuchen, wann

*) Wenn wir mit Voss, Ber. d. bayer. Akad. d. Wissensch. math.-phys. Klasse 1892, p. 257 bezeichnen: L $\Delta^2 = D' F - D G$
$L_1 \Delta^2 = D F - D' E$
$M \Delta^2 = D'' F - D' G$
$M_1 \Delta^2 = D' F - D'' E$
wo $L + M_1 = - H$.

ein bestimmtes Parameterkurvensystem bei einer Deformation infinitesimal erhalten bleibt.

Sei die Fläche auf ein Orthogonalsystem von Parameterlinien bezogen und soll dieses infinitesimal erhalten bleiben, so haben wir bei einer Deformation der Fläche in sich (nach 1):

$$\delta F = \mu_u G + \lambda_v E = 0,$$

oder:

$$\mu = -\int \tau E \, du + V; \quad \lambda = \int \tau G \, dv + U,$$

wo τ eine beliebige Funktion von u und v, V eine solche von v, U eine solche von u allein bedeutet.

Bei Deformation längs der Normalen erhalten wir:

$$\delta F = -2 \nu D' = 0,$$

woraus sich der Satz ergibt: Eine Fläche kann nur dann unter infinitesimaler Erhaltung des Orthogonalsystems der Parameterlinien längs der Normalen deformiert werden, wenn das Orthogonalsystem aus den Krümmungslinien besteht.*)

Sei ferner die Fläche auf ihre Minimalkurven als Parameterlinien bezogen, und stellen wir hier die gleiche Forderung, so ergeben die Gleichungen 1) bei einer Deformation der Fläche in sich:

$$\delta E = 2 \mu_u F = 0; \quad \delta G = 2 \lambda_v F = 0,$$

woraus sich ergibt: soll die Fläche unter infinitesimaler Erhaltung der Minimalkurven als Parameterlinien in sich deformiert werden, so ist λ als eine Funktion von u allein, μ als eine solche von v allein zu wählen.

Bei einer Deformation längs der Normalen ergeben dieselben Gleichungen:

$$\delta E = -2 \nu D = 0; \quad \delta G = -2 \nu D'' = 0,$$

*) Daniële, Memorie di Torino l. c., p. 61.

so daß in diesem Falle die Minimalkurven mit den Haupttangentenkurven zusammenfallen müssen. Um die Flächen, bei denen dies der Fall ist, aufzustellen, integrieren wir die Codazzischen Gleichungen. Diese werden:

$$-F D'_u + F_u D' = 0$$
$$-F D'_v + F_v D' = 0,$$

also $\frac{D'}{F} = \text{const.} = c$. Ferner:

$$\frac{D'^2}{F^2} = -\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v}$$

und mit Benutzung des vorigen:

$$-c^2 = \frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist bekanntlich:

$$F = -\frac{2 V_v U_u}{c^2 (V + U)^2},$$

wo U, V beliebige Funktionen von u resp. v allein bedeuten. Führen wir neue Parameter

$$V = \frac{1}{v};\ U = u$$

ein, so kommt:

$$F = \frac{2}{c^2 (1 + u v)^2};\ D' = \frac{2}{c (1 + u v)^2},$$

das sind aber die betreffenden Fundamentalgrößen der Kugel vom Radius c, die auf ihre Minimalgeraden als Parameterlinien bezogen ist.

Wir haben den Satz: Die einzige Fläche, welche unter infinitesimaler Erhaltung der Minimalkurven als Parameterlinien längs der Normalen deformiert werden kann, ist die Kugel.

Die gleiche Aufgabe für das Parametersystem der

Krümmungslinien ergibt bei einer Deformation der Fläche in sich (nach 1) und 3)):

$$\delta F = \mu_u G + \lambda_v E = 0; \quad \delta D' = \mu_u D'' + \lambda_v D = 0.$$

Im Falle der Kugel ($E : G = D : D''$) erhalten wir:

$$\lambda = \Phi_u; \quad \mu = \Phi_v,$$

wo Φ eine beliebige Funktion von u und v. In jedem anderen Falle jedoch folgt:

$$\mu_u = 0; \quad \lambda_v = 0,$$

oder:

$$\mu = V; \quad \lambda = U,$$

wo V eine Funktion von v, U eine solche von u allein.

Ist die Fläche auf ihre Haupttangentenkurven als Parameterlinien bezogen, dann ergibt die mehrgenannte Forderung bei einer Deformation der Fläche in sich (gemäß 3):

$$\delta D = 2 \mu_u D' = 0; \quad \delta D'' = 2\lambda_v D' = 0.$$

Schließen wir den Fall der Ebene aus, bei der alle Deformationen der Fläche in sich diese Forderung erfüllen, so erhalten wir:

$$\lambda = U, \quad \mu = V,$$

wo U eine Funktion von u allein, V eine solche von v allein darstellt.

Sei schließlich die Fläche auf ein geodätisches System als Parameterlinien bezogen ($E = 1$, $F = 0$), so haben wir bei einer Deformation der Fläche in sich die Bedingungen:

$$\delta E = 2 \lambda_u E = 0; \quad \delta F = \mu_u G + \lambda_v = 0,$$

woraus:

$$\lambda = V; \quad \mu = V_v \int \frac{du}{G} + V_1$$

wo V und V_1 beliebige Funktionen von v allein bedeuten.

Im Falle einer Deformation längs der Normalen erhalten wir dagegen:

$$\delta E = -2\nu D = 0; \quad \delta F = -2\nu D' = 0,$$

so daß sich ergibt: Die einzigen Flächen, welche unter infinitesimaler Erhaltung eines geodätischen Systems der Parameterkurven längs der Normalen deformiert werden können, sind die abwickelbaren Flächen; das geodätische System ist das der Geraden und ihrer orthogonalen Trajektorien. —

Nachdem die Variationen der Fundamentalgrößen 1. und 2. Ordnung bekannt sind, können wir jetzt auch die Ausdrücke für die Variationen der Gauss'schen und mittleren Krümmung aufstellen (mittels 2) und 3)):

$$\delta K = \delta\left(\frac{D D'' - D'^2}{\Delta^2}\right) = \lambda K_u + \mu K_v + \nu H K$$

4) $$-\frac{1}{\Delta^2}\Big\{D''(A\nu_u + A_1\nu_v - \nu_{uu}) + D(C\nu_u + C_1\nu_v - \nu_{vv}) - 2D'(B\nu_u + B_1\nu_v - \nu_{uv})\Big\}$$

$$\delta H = \delta\left(\frac{E D'' + G D - 2F D'}{\Delta^2}\right) = \lambda H_u + \mu H_v + \nu(H^2 - 2K)$$

5) $$-\frac{1}{\Delta^2}\Big\{G(A\nu_u + A_1\nu_v - \nu_{uu}) + E(C\nu_u + C_1\nu_v - \nu_{vv}) - 2F(B\nu_u + B_1\nu_v - \nu_{uv})\Big\}.$$

Formel 4) zeigt, daß man für eine Fläche, welche nicht konstante Krümmung hat, explizit alle Deformationen (λ, μ, ν) angeben kann, für welche δK verschwindet. Es sind dabei lediglich zwei willkürliche Funktionen von u und v (z. B. für μ und ν) einzuführen. Im Falle der Flächen konstanter Krümmung bedarf es jedoch der Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung. Wir werden diese in § 4 für den Fall der Kugel integrieren.

Ganz analoge Verhältnisse zeigt Formel 5). Auch hier

kann man, falls die Fläche nicht konstanter mittlerer Krümmung ist, unter Einführung zweier willkürlicher Funktionen von u und v sofort alle Deformationen (λ, μ, ν) angeben, welche δH verschwinden lassen. Der Fall der Flächen konstanter mittlerer Krümmung erheischt die Integration einer Differentialgleichung gleicher Art wie vorhin, welche wir für den Fall der Minimalflächen in § 4 integrieren werden.

Betrachten wir die unendlich nahe Parallelfläche einer Fläche ($\lambda = \mu = 0$; $\nu = \text{const.}$), so ergibt Formel 4), daß die Minimalflächen und die Devellopablen die einzigen sind, bei deren unendlich nahen Parallelflächen die Variation von K verschwindet. Formel 5) zeigt, daß wenn die Variation der mittleren Krümmung für die gleiche Deformation verschwinden soll:

$$H^2 - 2K = 0 \text{ oder } \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} = 0$$

sein muß, wo ρ, ρ' die Hauptkrümmungsradien bedeuten. Die einzige reelle Fläche dieser Art ist die Ebene. —

Berechnen wir schließlich die Variationen der Richtungscosinusse der Fläche:

$$\delta X = (\nu_u + \lambda D + \mu D') \frac{x_v F - x_u G}{\Delta^2} + (\nu_v + \lambda D' + \mu D'') \frac{x_u F - x_v E}{\Delta^2}$$

$$6)\quad \delta Y = (\nu_u + \lambda D + \mu D') \frac{y_v F - y_u G}{\Delta^2} + (\nu_v + \lambda D' + \mu D'') \frac{y_u F - y_v E}{\Delta^2}$$

$$\delta Z = (\nu_u + \lambda D + \mu D') \frac{z_v F - z_u G}{\Delta^2} + (\nu_v + \lambda D' + \mu D'') \frac{z_u F - z_v E}{\Delta^2}$$

so ergeben sich nun auch die Variationen der Fundamentalgrößen der sphärischen Abbildung e, f, g, die noch angeführt seien, auf folgenden beiden Wegen, z. B:

$$\delta e = \delta (H D - K E) \text{ oder } = \delta (\Sigma X_u^2).$$

Dazu dienen noch folgende Determinanten:

$$
\begin{array}{ll|ll}
| X X_u x_u | = -L_1 \Delta & & | X X_u x_{uu} | = \Delta (A_1 L - A L_1) \\
| X X_u x_v | = L \Delta & & | X X_u x_{uv} = \Delta (B_1 L - B L_1) \\
| X X_v x_u | = -M_1 \Delta & & | X X_u x_{vv} = \Delta (C_1 L - C L_1) \\
| X X_v x_v | = M \Delta & & | X X_v x_{uu} | = \Delta (A_1 M - A M_1) \\
| X_u X_v x_u | = 0 & & | X X_v x_{uv} | = \Delta (B_1 M - B M_1) \\
X_u X_v x_v | = 0 & & | X X_v x_{vv} = \Delta (C_1 M - C M_1).
\end{array}
$$

Wir erhalten dann:

$$
\begin{aligned}
\delta e &= \lambda e_u + \mu e_v + \lambda_u \cdot 2e + \mu_u \cdot 2f \\
&\quad + 2L(A\nu_u + A_1 \nu_v - \nu_{uu}) + 2L_1 (B\nu_u + B_1 \nu_v - \nu_{uv}) \\
\delta f &= \lambda f_u + \mu f_v + \lambda_u f + \lambda_v e + \mu_u g + \mu_v f \\
&\quad + M(A\nu_u + A_1 \nu_v - \nu_{uu}) + L_1 (C\nu_u + C_1 \nu_v - \nu_{vv}) \\
&\quad - H(B\nu_u + B_1 \nu_v - \nu_{uv}) \\
\delta g &= \lambda g_u + \mu g_v + \lambda_v \cdot 2f + \mu_v \cdot 2g \\
&\quad + 2M(B\nu_u + B_1 \nu_v - \nu_{uv}) + 2M_1 (C\nu_u + C_1 \nu_v - \nu_{vv}).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

§ 3. Die Variationen von K und H.

Haben wir im vorigen § die Variationsformeln für die λ, μ, ν angegeben, wobei die λ, μ, ν die Komponenten der Deformation in einem instantanen Koordinatensystem zu charakterisieren gestatteten (wie in § 7 noch näher ausgeführt werden wird), so ist dabei zu bedenken, daß dieser Ansatz nicht erlaubt, unmittelbar stets den Fall der isometrischen Deformation von dem der nicht-isometrischen abzusondern. Um diejenigen λ, μ ν, welche isometrische Deformationen bewirken, zu finden, sind die Gleichungen 1) des vorigen § für $P = Q = R = 0$ aufzulösen. Um also auch in den Variationsformeln die isometrischen Deformationen charakterisieren zu können, wird es sich darum

handeln, die Größen P, Q, R in dieselben einzuführen. Nun ist aber dadurch, daß wir den P, Q, R bestimmte Werte geben, noch nicht eine bestimmte einzelne Deformation charakterisiert, sondern es sind dann noch unendlich viele verschiedene Deformationen möglich — insbesondere geben z. B. die Werte $P = Q = R = 0$ erst die Gesamtheit der isometrischen Deformationen. Die hier noch bleibende Variabilität der Deformation läßt sich nun, wie Weingarten zuerst gezeigt hat, aufheben durch Einführung einer Funktion φ, der sogenannten charakteristischen Funktion, welche einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung zu genügen hat.

Insbesondere wird es sich im Folgenden auch darum handeln, den unmittelbaren Nachweis zu liefern, daß δK für die isometrischen Deformationen mit den P, Q, R identisch verschwindet. —

Die Weingarten'sche charakteristische Funktion ist definiert durch den Ausdruck:

$$\varphi = \frac{1}{2\,\Delta}\,(\Sigma\,\xi_v\,x_u - \Sigma\,\xi_u\,x_v).$$

Führen wir denselben ein in die Formeln 7) des § 1, so werden diese:

1)
$$\begin{aligned} \Sigma\,\xi_u\,x_u &= P \\ \Sigma\,\xi_u\,x_v &= Q - \Delta\,\varphi \\ \Sigma\,\xi_v\,x_u &= Q + \Delta\,\varphi \\ \Sigma\,\xi_v\,x_v &= R. \end{aligned}$$

Durch Einführung der λ, μ, ν mittels der Gleichungen 8) des § 1 erhalten wir aus 1):

2)
$$\begin{aligned} &\lambda_u E + \tfrac{1}{2}\lambda E_u + \mu_u F + \tfrac{1}{2}\mu E_v = \nu D + P \\ &\lambda_u F + \lambda(F_u - \tfrac{1}{2}E_v) + \mu_u G + \tfrac{1}{2}\mu G_u = \nu D' - \Delta\varphi + Q \\ &\lambda_v E + \tfrac{1}{2}\lambda E_v + \mu_v F + \mu(F_v - \tfrac{1}{2}G_u) = \nu D' + \Delta\varphi + Q \\ &\lambda_v F + \tfrac{1}{2}\lambda G_u + \mu_v G + \tfrac{1}{2}\mu G_v = \nu D'' + R. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir dann die Gleichungen 2) der Reihe nach mit — F, E, G, — F, und addieren die 1. und 2. sowie die 3. und 4.; multiplizieren wir die Gleichungen 2) ferner der Reihe nach mit G, — F, — F, E, und addieren die beiden ersten und die beiden letzten, so kommt:

$$3)\quad \begin{aligned} \lambda_u + \lambda A + \mu B &= \frac{1}{\Delta^2}\left\{\nu(D'G - D'F) + \Delta\varphi F + (PG - QF)\right\} \\ \lambda_v + \lambda B + \mu C &= \frac{1}{\Delta^2}\left\{\nu(D''G - D''F) + \Delta\varphi G + (QG - RF)\right\} \end{aligned}$$

$$4)\quad \begin{aligned} \mu_u + \lambda A_1 + \mu B_1 &= \frac{1}{\Delta^2}\left\{\nu(D'E - DF) - \Delta\varphi E + (QE - PF)\right\} \\ \mu_v + \lambda B_1 + \mu C_1 &= \frac{1}{\Delta^2}\left\{\nu(D''E - D'F) - \Delta\varphi F + (RE - QF)\right\} \end{aligned}$$

Um dann die Integrabilitätsbedingungen des Systems 2) zu erhalten, differenzieren wir die erste nach v, die dritte nach u, und ersetzen die ersten Differentialquotienten der λ, μ aus 3) und 4). Ebenso verfahren wir mit der zweiten und vierten Gleichung 2) und erhalten:

$$5)\quad \begin{aligned} -\mu &= \frac{\nu_v D - \nu_u D'}{K\Delta^2} - \frac{1}{K\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{S}{K\Delta^2} \\ -\lambda &= \frac{\nu_u D'' - \nu_v D}{K\Delta^2} + \frac{1}{K\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{T}{K\Delta^2}, \end{aligned}$$

wo gesetzt ist:

$$6)\quad \begin{aligned} -S &= P B + Q(B_1 - A) - R A_1 + Q_u - P_v \\ -T &= R B_1 + Q(B - C_1) - P C + Q_v - R_u. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen 2) der Reihe nach mit G, — F, — F, E und addieren, so erhalten wir die Gleichung:

$$7)\quad \frac{\partial(\lambda\Delta)}{\partial u} + \frac{\partial(\mu\Delta)}{\partial v} = \frac{PG - 2QF + RE}{\Delta} + \nu \cdot H\Delta\ ^*).$$

*) Bezüglich der bisherigen Gleichungen dieses § siehe Voss 1904, § 5.

Setzen wir die Werte von λ und μ aus 5) in diese Gleichung ein, so kommt nach einigen Umformungen:

$$0 = \frac{1}{\Delta^2}\Big\{ \nu_u (C\,D + A\,D'' - 2\,B\,D') + \nu_v (C_1\,D + A_1\,D'' - 2\,B_1\,D') - (D''\,\nu_{uu} + D\,\nu_{vv} - 2\,D'\,\nu_{uv})\Big\}$$

$$8)\quad + \frac{1}{K\,\Delta^2}(K_u D''\nu_u + K_v D\nu_v - K_u D'\nu_v - K_v D'\nu_u) - \nu H K + \frac{K_u}{K\,\Delta}\varphi_v - \frac{K_v}{K\,\Delta}\varphi_u - \frac{K}{\Delta}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{T}{K\,\Delta}\right) - \frac{K}{\Delta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{S}{K\,\Delta}\right) - K\frac{P\,G + R\,E - 2\,Q\,F}{\Delta^2}.$$

Setzen wir andererseits dieselben Werte (5) in die in § 2 erhaltene Formel für δK (4. in § 2) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$\delta K = -\frac{1}{\Delta^2}\Big\{ \nu_u (C\,D + A\,D'' - 2\,B\,D') + \nu_v (C_1\,D + A_1\,D'' - 2\,B_1\,D') - (D''\,\nu_{uu} + D\,\nu_{vv} - 2\,D'\,\nu_{uv})\Big\}$$

$$9)\quad - \frac{1}{K\,\Delta^2}(K_u D''\nu_u + K_v D\nu_v - K_u D'\nu_v - K_v D'\nu_u) + \nu H K - \frac{K_u}{K\,\Delta}\varphi_v + \frac{K_v}{K\,\Delta}\varphi_u - \frac{K_u}{K\,\Delta^2}\cdot T - \frac{K_v}{K\,\Delta^2}\,S.$$

Durch Addition der Gleichungen 8) und 9) kommt schließlich:

$$10)\quad \delta K = K\frac{2\,Q\,F - P\,G - R\,E}{\Delta^2} - \frac{K}{\Delta}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{T}{K\,\Delta}\right) - \frac{K}{\Delta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{S}{K\,\Delta}\right) - \frac{K_u}{K\,\Delta^2}\cdot T - \frac{K_v}{K\,\Delta^2}\cdot S,$$

wo φ und ν von selbst herausgefallen sind. Eine kleine

Rechnung zeigt, daß wir δK auch in folgender kürzerer Form schreiben können:

$$11)\quad \delta K = \frac{2FQ - ER - GP}{\Delta^2} \cdot K - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{T}{\Delta}\right) - \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{S}{\Delta}\right).$$

Erinnern wir uns an die Definition von T und S (6), so ist nun unmittelbar ersichtlich, daß für $P = Q = R = 0$ der Ausdruck 11) identisch verschwindet.

Ribaucour*) hat zuerst die Bemerkung gemacht, daß nach dem Gauss'schen Theoreme δK für $P = Q = R = 0$ verschwinden müsse, doch einen rechnerischen Nachweis dafür nicht erbracht. Später hat dann Cosserat**) einen Beweis für diesen Satz angegeben, indem er, ausgehend von den Darboux'schen Formeln (A) und (B) des Livre V. der leçons***), zeigte, daß das Problem auf das Vorhandensein einer gewissen notwendigen Integrabilitätsbedingung hinauslaufe. Durch den obigen Ansatz gelingt es nun, diese Untersuchung mit den gewohnten Formeln der Flächentheorie in durchsichtige Beziehung zu setzen, und Formeln aufzustellen, aus denen das Bestehen der verlangten Eigenschaft unmittelbar hervorgeht.

Betrachten wir noch kurz die Methode, welche Ribaucour, wie auch Cosserat, anwendet, um die Variationen von K und H zu finden. Beide Forscher berechnen zunächst die Richtungscosinusse einer zur gegebenen Fläche unendlich benachbarten Fläche F' (der infinitesimal deformierten), und zwar inbezug auf ein instantanes Koordinatensystem, das z. B. bei Ribaucour aus der Normalen und den beiden Tangenten an die (orthogonalen) Parameterlinien

*) »Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes« Journal de Liouville IV. Série t. VII. 1891, p. 1—108, 219—270 (p. 243.)

**) »Sur la déformation infinitésimale d'une surface flexible et inextensible et sur les congruences des droites«. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse t. VIII. 1894 (p. 2 ff.)

***) Leçons, Band II, p. 348.

im Flächenpunkte besteht. Die Normalen von F' bilden ein Normalensystem. Stellt man dann die quadratische Gleichung für die Abscissen r_1, r_2 der Brennpunkte auf den Strahlen des Systems auf, so erhält man (bei Vernachläßigung der höheren Potenzen von ε als der ersten) in den Koeffizienten dieser Gleichung unmittelbar die gesuchten Größen $K + \delta K$ und $H + \delta H$*).

*) Um die Uebereinstimmung des Resultates von Ribaucour, wenigstens bezüglich δK, mit dem unsrigen in Evidenz zu setzen, sei es gestattet, einen kurzen Vergleich der beiderseits verwendeten Größen vorzunehmen. Ribaucour findet (l. c. p. 241):

$$-fg\frac{\delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right) = \frac{k}{R_1 R_2} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q\pi + gD\pi'}{fg}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P\pi' + fD\pi}{fg}\right)$$

Beachtet man, daß Ribaucour ein orthogonales Parametersystem seinen Rechnungen zu Grunde legt, so ergibt sich, wenn jedesmal links die bei R. benutzten Größen stehen, rechts die unsrigen:

$$P = -\frac{D}{\sqrt{E}}; \quad Q = -\frac{D''}{\sqrt{G}}; \quad D = \frac{D'}{\sqrt{EG}}$$

$$f^2 = E; \quad g^2 = G; \quad d\rho = \varepsilon$$

$$\pi = \nu_u + \lambda D + \mu D'; \quad \pi' = \nu_v + \lambda D' + \mu D''$$

$$k = \delta\left(\sqrt{EG}\right).$$

Setzt man diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhält man (in unseren Termen):

$$-\sqrt{EG}\cdot\delta K = K\cdot\delta\Delta + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'\nu_v - D''\nu_u - \lambda K\Delta^2}{\Delta}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'\nu_u - D\nu_v - \mu K\Delta^2}{\Delta}\right).$$

Ersetzt man hier λ und μ durch ihre Werte aus 5), so gelangt man unmittelbar zu unserer Gleichung 11).

Bei dieser Gelegenheit sei auf zwei Druckfehler der R.'schen Abhandlung hingewiesen: p. 16 bei der Definition der Größe D muß es heißen: $Cf = C'g = -fgD$ (statt: $+fgD$); ferner muß in den Formeln p. 237 und 238 oben statt ζ gesetzt werden: γ.

Denken wir uns nun die Fläche auf Minimalkurven als Parameterlinien gebracht, dann wird die Variation der Krümmung:

$$\delta K = -2K\frac{Q}{F} + \frac{1}{F}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_u}{F}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P_v}{F}\right) - 2\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{Q}{F}\right)\right\}.$$

Es ergibt sich daraus, daß man in diesem Falle, um alle P, Q, R zu bestimmen, für die $\delta K = 0$ ist, lediglich zweier Quadraturen bedarf. In der Tat, nehmen wir für R und Q zwei beliebige Funktionen von u und v, dann erhalten wir P durch zwei Quadraturen, wobei noch zwei beliebige Funktionen von u allein einzuführen sind.

Betrachten wir den Fall der konformen Deformation: $P = \lambda E$; $Q = \lambda F$, $R = \lambda G$, wo λ eine Funktion von u und v, so ergibt sich aus dem eben angeschriebenen Ausdrucke für δK, daß die Aufsuchung aller konformen Deformationen, bei denen die Variation der Gauss'schen Krümmung verschwindet, abhängt von der Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v} + \lambda \cdot F \cdot K = 0.$$

Um auch δH soweit als möglich mit den P, Q, R in Verbindung zu bringen (es muß δH im Allgemeinen nämlich außerdem noch von φ abhängen), bilden wir mittels der Gleichungen 5) die Ausdrücke:

$$-(\lambda D + \mu D') = \nu_u + \frac{D\varphi_v - D'\varphi_u}{K\Delta} + \frac{TD + SD'}{K\Delta^2}$$

$$-(\lambda D' + \mu D'') = \nu_v + \frac{D'\varphi_v - D''\varphi_u}{K\Delta} + \frac{TD' + SD''}{K\Delta^2}$$

oder:

$$\nu_u + \lambda D + \mu D' = \frac{D'\varphi_u - D\varphi_v}{K\Delta} - \frac{TD + SD'}{K\Delta^2} = U$$

12)

$$\nu_v + \lambda D' + \mu D'' = \frac{D''\varphi_u - D'\varphi_v}{K\Delta} - \frac{TD' + SD''}{K\Delta^2} = V.$$

Ein Vergleich mit den Formeln 6) des § 2 zeigt, daß wir also aus δX, δY, δZ die λ, μ, ν eliminieren können, so daß sich diese nur durch P, Q, R, φ ausdrücken. Es kommt:

$$\delta X = \frac{1}{\Delta^2}\Big\{U(x_v F - x_u G) + V(x_u F - x_v E)\Big\}$$

13)

$$\delta Y = \frac{1}{\Delta^2}\Big\{U(y_v F - y_u G) + V(y_u F - y_v E)\Big\}$$

$$\delta Z = \frac{1}{\Delta^2}\Big\{U(z_v F - z_u G) + V(z_u F - z_v E)\Big\}.$$

Jetzt können auch die Variationen von D, D', D'' durch P, Q, R, φ allein ausgedrückt werden. Es ist nämlich:

$$\delta D = \delta(\Sigma X x_{uu}) = \Sigma X \delta x_{uu} + \Sigma x_{uu} \delta X \text{ etc.}$$

Aus den Formeln 8) des § 1 ist sofort:

14)

$$U = \Sigma X \xi_u; \quad V = \Sigma X \xi_v.$$

Also:

$$\Sigma X \xi_{uu} = \frac{\partial U}{\partial u} - \Sigma X_u \xi_u \text{ etc.,}$$

so daß kommt:

$$\delta D = \frac{\partial U}{\partial u} - \Sigma X_u \xi_u + \Sigma x_{uu} \delta X$$

$$\delta D'' = \frac{\partial V}{\partial v} - \Sigma X_v \xi_v + \Sigma x_{vv} \delta X$$

$$\delta D' = \frac{\partial V}{\partial u} - \Sigma X_u \xi_v + \Sigma x_{uv} \delta X$$

$$= \frac{\partial U}{\partial v} - \Sigma X_v \xi_v + \Sigma x_{uv} \delta X.$$

Die einzelnen Terme ergeben sich mittels bekannter Formeln, und wenn wir die Bezeichnungen des § 2 benutzen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\delta\, D &= U_u - L\,P - L_1\,(Q - \Delta\varphi) - A\,U - A_1\,V \\
15)\quad \delta\, D'' &= V_v - M\,(Q + \Delta\varphi) - M_1\,R - C\,U - C_1\,V \\
\delta\, D' &= V_u - L\,(Q + \Delta\varphi) - L_1\,R - B\,U - B_1\,V \\
&= U_v - M\,P - M_1\,(Q - \Delta\varphi) - B\,U - B_1\,V.
\end{aligned}$$

Die Gleichsetzung der beiden Werte für $\delta D'$ liefert dann eine Gleichung zwischen λ, μ und P, Q, R, φ, wenn wir U, V gemäß 12) in λ, μ, ν ausdrücken; drücken wir U, V dagegen in P, Q, R, φ aus, so erhalten wir die partielle Differentialgleichung, der φ genügen muß:*)

$$16)\qquad \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial v} = -\varphi\cdot\Delta\cdot H + \frac{1}{\Delta^2}\begin{vmatrix} P & Q & R \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix}.$$

Die Formeln 15) im Verein mit den Formeln 7) des § 1 erlauben nunmehr die Variation der mittleren Krümmung H in den P, Q, R, φ allein darzustellen.

Es ist:

$$\delta H = \frac{1}{\Delta^2}(E\,\delta D'' + G\,\delta D - 2F\,\delta D') + \frac{2}{\Delta^2}(DR + D''P - 2D'Q) - H\frac{\delta(\Delta^2)}{\Delta^2},$$

oder mittels der genannten Formeln:

$$\begin{aligned}
\delta H = {} & P\,\frac{D'' - GH}{\Delta^2} + R\,\frac{D - EH}{\Delta^2} - 2Q\,\frac{D' - FH}{\Delta^2} \\
17)\quad & + \frac{1}{\Delta^2}\Big\{(EV_v + GU_u - F(V_u - U_v)) - U(AG + CE - 2FB) \\
& - V(A_1G + C_1E - 2FB_1)\Big\}
\end{aligned}$$

*) Voss 1904, p. 181.

und wenn wir für U, V ihre Werte in P, Q, R, φ aus 12) einsetzen:

$$\delta H = P\frac{D'' - GH}{\Delta^2} + R\frac{D - EH}{\Delta^2} - 2Q\frac{D' - FH}{\Delta^2}$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{TL_1 + SM_1}{K\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{TL + SM}{K\Delta}\right)\right\}$$

18)
$$+ \frac{\varphi_v}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{L}{K}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L_1}{K}\right)\right\} - \frac{\varphi_u}{\Delta}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{K}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M_1}{K}\right)\right\}$$

$$+ \frac{1}{K\Delta^3}\begin{vmatrix} \varphi_{uu} & \varphi_{uv} & \varphi_{vv} \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix}.$$

Die für $P = Q = R = 0$ übrig bleibenden Glieder enthalten nun keine Bestandteile mehr, welche mit diesen gleichzeitig verschwinden. Natürlich können wir jetzt auch die Variationen von e, f, g in den P, Q, R, φ allein ausdrücken.

Eine Bemerkung sei noch gestattet: Die Ausdrücke für S und T ändern sich wegen der Codazzischen Gleichungen nicht, wenn wir statt P, Q, R setzen: $P + c\,D$; $Q + c\,D'$; $R + c\,D''$, wo c eine Konstante bedeutet. Daher ändert sich auch der Wert für δK (Formel 11) nicht bei derselben Substitution dann, wenn (E, F, G, D, D,' D'') eine Minimalfläche ist. Da sich auch die Größen U und V (12) bei dieser Substitution nicht ändern, so liefert uns Gleichung 16) die Bemerkung, daß, wenn sie für P, Q, R gelöst ist, sie auch für $P + c\,D$, $Q + c\,D'$, $R + c\,D''$ gelöst ist. Da die beiden ersten Codazzischen Gleichungen identisch erfüllt sind, wenn man statt D, D', D'' resp. E, F, G einsetzt, so erweitert sich die eben gemachte Bemerkung auch auf die Substitution $P + c\,E$, $Q + c\,F$, $R + c\,G$, wo c eine Konstante. —

§ 4. Fortsetzung.

Die im vorigen § erhaltenen Formeln liefern nun den Zusammenhang der λ, μ, ν mit den P, Q, R, φ. Denken wir uns nämlich Gleichung 8) des vorigen § nach ν aufgelöst, so haben wir in Verbindung mit den Gleichungen 5) λ, μ, ν als Funktionen von P, Q, R, φ.

Ist eine Deformation der Fläche durch Angabe der λ, μ, ν gegeben, dann ist gemäß den Gleichungen 8) des § 1 die deformierte Fläche nebst ihrer Lage im Raume vollständig bestimmt. Ist die Deformation durch Angabe der P, Q, R gegeben, so muß das zugehörige φ aus der Gleichung 16) des § 3 berechnet werden. Wählen wir unter den so erhaltenen Werten von φ einen bestimmten aus, so daß jetzt P, Q, R, φ sämtlich bestimmte Werte haben, dann ergeben die Gleichungen 7) des § 1 sowie 15) des § 3 die sechs Fundamentalgrößen der gesuchten Fläche, so daß diese durch Angabe von P, Q, R, φ bis auf ihre Lage im Raume gegeben erscheint, wie man aus dem Umstande erkennt, daß die Größen P, Q, R, φ gegenüber der Gruppe der Bewegungen invariant sind.

Wir wollen nun die im vorigen § erhaltenen Resultate zu einigen weiteren Untersuchungen benutzen.

Betrachten wir die Variation von H im Falle der isometrischen Deformation ($P = Q = R = 0$). Denken wir uns die Fläche auf ihre Krümmungslinien als Parameterkurven gebracht, dann erhält δH (nach 18) in § 3) folgende einfache Gestalt:

$$18^a) \qquad \partial H = \frac{\partial}{\partial v}\left(\varphi_u \frac{E}{D}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\varphi_v \frac{G}{D''}\right).$$

Nun hat Ribaucour*) den Begriff der »Grenzflächen« (surfaces limites) aufgestellt. Wir haben dann

*) L. c., p. 245, 246 Anm.

eine Grenzfläche vor uns, wenn bei jeder ihrer isometrischen Deformationen auch die Variation der mittleren Krümmung verschwindet. Cosserat hat dann*) weitere Betrachtungen über diese Flächen angestellt, und den Ribaucour'schen analytischen Ansatz geometrisch dahin interpretiert, daß eine Grenzfläche gewissermaßen »la plus gonflée«**) unter den zu ihr isometrischen sei. Er hat ferner nachgewiesen, daß alle Grenzflächen isothermische Flächen sein müssen.

Die Formel 18a) zeigt nun unmittelbar, daß die Kugel (wo $\frac{E}{D} = \frac{G}{D''} = \text{const.}$ stattfindet) eine solche Grenzfläche ist, womit zum erstenmale ein Beispiel für diese Flächengattung gegeben erscheint.

Die Aufgabe, alle Grenzflächen zu bestimmen, erfordert die Ermittelung von φ aus Gleichung 16) (§ 3) für $P = Q = R = 0$. Setzen wir das so erhaltene φ dann in $\delta H = 0$ (wobei $P = Q = R = 0$) ein, so erhalten wir eine Beziehung zwischen den 6 Fundamentalgrößen einer Fläche, durch welche alle Grenzflächen charakterisiert sind. Es verlangt also die Lösung dieses Problemes innerhalb unseres Gedankenganges die vollständige Lösung des Problemes der infinitesimalen isometrischen Deformation.

Betrachten wir die Gleichung $\delta H = 0$ (gemäß 18a):

$$\varphi_{uv}\left(\frac{E}{D} - \frac{G}{D''}\right) + \varphi_u \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E}{D}\right) - \varphi_v \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G}{D''}\right) = 0$$

zusammen mit Gleichung 16) (§ 3) für $P = Q = R = 0$:

$$16') \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{EG}\,\frac{\varphi_u}{D}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{EG}\,\frac{\varphi_v}{D''}\right) = -\varphi\,\frac{E\,D'' + G\,D}{\sqrt{EG}},$$

wo die Fläche beidemale auf Krümmungslinien bezogen ist, als ein simultanes System für φ, so sind die, diesem

*) p. 13 der genannten Abhandlung.

**) L. c. p. 14.

Systeme genügenden Werte von φ alle diejenigen, welche bei isometrischer Deformation der Fläche δH verschwinden lassen. Sind für eine Fläche diese Werte alle bekannt, so ergibt sich die Antwort auf die Frage, ob diese Fläche eine Grenzfläche ist oder nicht, daraus, ob die Lösung der Gleichung 16') für sich allein genommen, mit der Lösung des simultanen Systems sich deckt oder nicht.

Für die Kugel ist Gleichung 18a) wie gesagt identisch erfüllt. Aber auch die Gleichung 16') können wir für die Kugel vollständig lösen. Sei diese auf eines ihrer Isothermensysteme bezogen, so daß $E = G$; $F = 0$; $D = kE$; $D' = 0$; $D'' = kE$, wo $k^2 = \text{const.}$ das Krümmungsmaß bedeutet, dann wird Gleichung 16'):

$$\text{a)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = -2\varphi k^2 E.$$

Nun haben wir in § 2 für ein gleiches Parametersystem wie hier alle isometrischen Deformationen der Kugel vollständig aufgestellt. Führen wir die dort erhaltenen Werte für λ, μ, ν in die beiden mittleren Gleichungen von 1) des vorigen § ein, und subtrahieren, so erhalten wir:

$$\text{b)} \quad \varphi = i(f' - g') \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - (f' + g') \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} - (f'' + g''),$$

wo f eine beliebige Funktion von $(u + iv)$ allein, g eine solche von $(u - iv)$ allein bedeutet, und die Akzente an f und g die totale Differentiation nach dem Argumente anzeigen. Setzt man diesen Wert in die obige Differentialgleichung a) ein, so erkennt man, daß diese dadurch befriedigt wird, falls E der dritten Codazzischen Gleichung genügt, welche hier die Gestalt

$$\text{c)} \qquad -k^2 E = \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial v^2}$$

annimmt. Wir haben den Satz:

Genügt in der partiellen, linearen Differentialgleichung 2. Ordnung a) die Größe E der linearen, partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung c), dann ist b) das vollständige Integral von a).

Ein weiterer Fall, in dem die Aufgabe, alle diejenigen isometrischen Deformationen zu bestimmen, bei denen $\delta H = 0$ stattfindet, sich völlig ausführen läßt, ist der Fall der Minimalrotationsfläche, des Katenoids. Sei dieses gegeben in der Form:

$$x = \frac{a}{2}(e^u + e^{-u}) \cos v; \quad y = \frac{a}{2}(e^u + e^{-u}) \sin v; \quad z = a u$$

(wo a eine Konstante), dann ist:

$$E = G = \frac{a^2}{4}(e^u + e^{-u})^2; \quad F = D' = 0; \quad D = -a; \quad D'' = +a.$$

Gleichung 18a) wird hier:

$$\alpha) \qquad 2 E \varphi_{uv} = -\varphi_v E_u.$$

Gleichung 16) erhält die Gestalt:

$$\beta) \qquad (\varphi_v E)_v = (\varphi_u E)_u.$$

Setzen wir $\varphi_u = A$, $\varphi_v = B$, so erhalten wir das System:

$$\alpha') \qquad 2 E B_u = -B E_u$$

$$\beta') \qquad E B_v = A E_u + A_u E$$

$$\gamma) \qquad A_v = B_u.$$

Aus α') kommt:

$$B = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \Phi(v).$$

Sodann aus γ):

$$A = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) \cdot \int \Phi(v)\, dv + U,$$

wo Φ eine beliebige Funktion von v allein, U eine solche von u allein ist. Setzen wir diese Werte in β') ein, so ergibt sich:

$$\beta'') \qquad \sqrt{E} \cdot \Phi_v = -\frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial u^2} \cdot \int \Phi \, dv + \frac{\partial (U \cdot E)}{\partial u}.$$

Differenziert man diese Gleichung nach v, so sieht man, daß sein muß:

$$\frac{\partial}{\partial u}(U \cdot E) = \text{const.} = c_1; \quad U = \frac{c_1 u + c_2}{E},$$

ferner:

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{E}}{\partial u^2} = -\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2 \Phi}{dv^2} = c_3.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ergibt $c_3 = 1$, so daß sich für Φ (das reell sein soll) ergibt:

$$\Phi = c_4 \cdot \cos v.$$

Setzen wir diese Werte in β'') ein, so kommt jetzt $c_1 = 0$. Führen wir sie in die obigen Ausdrücke für A und B ein, so ergibt sich:

$$d\varphi = \left[c_4 \sin v \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) + \frac{c_2}{E} \right] du + \left[c_4 \frac{\cos v}{\sqrt{E}} \right] dv,$$

oder:

$$19a) \qquad \varphi = c_4 \frac{\sin v}{\sqrt{E}} + \int \frac{c_2}{E} du + c_5,$$

so daß der so erhaltene Wert für φ lediglich drei beliebige Konstante enthält.

Daß das Katenoid keine Grenzfläche ist, zeigt sich daraus, daß es isometrische Deformationen besitzt, welche δH nicht zu Null machen. Eine solche ist z. B.:

$$\varphi = c_4 \frac{\sin v}{\sqrt{E}} + c_2 \int \frac{du}{E} + a v + b$$

(wo a und b Konstante sind), welche zwar die Gleichung β) befriedigt, aber unter den Werten 19a) nicht enthalten ist.

Wir können aber über die Minimalflächen im Allgemeinen etwas aussagen bezüglich derjenigen isometrischen Deformationen, welche δH verschwinden lassen. Betrachten wir nämlich die Variationen der Fundamentalgrößen der sphärischen Abbildung, so werden diese bei isometrischer Deformation:

$$\delta e = \delta(HD - KE) = H\delta D + D\delta H$$
$$\delta f = \delta(HD' - KF) = H\delta D' + D'\delta H$$
$$\delta g = \delta(HD'' - KG) = H\delta D'' + D''\delta H.$$

Für Minimalflächen haben wir also den Satz:

Jede isometrische Deformation einer Minimalfläche, welche die Variation der mittleren Krümmung verschwinden läßt, hat mit der ursprünglichen Fläche ein infinitesimal gleiches, sphärisches Bild und umgekehrt.

Soll also eine Minimalfläche eine Grenzfläche sein, so müssen sämtliche ihrer isometrischen Deformationen die sphärische Abbildung infinitesimal ungeändert lassen. —

Scheint es nun auch schwierig zu sein, alle diejenigen isometrischen Deformationen der Minimalflächen zu bestimmen, bei denen $\delta H = 0$ ist, so gelingt es doch überhaupt alle Deformationen der Minimalflächen, für die $\delta H = 0$ stattfindet, in endlicher Form anzugeben.

In der Tat, beachten wir die Formel 5) des § 2 in diesem Falle, so wird sie, wenn wir die Minimalfläche als auf das Isothermensystem ihrer Krümmungslinien gebracht ansehen ($E = G, F = 0, H = 0, D' = 0; D = -1; D'' = +1;$

$$A = \frac{1}{2}\frac{E_u}{E};\ A_1 = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{E};\ C = -\frac{1}{2}\frac{E_u}{E};\ C_1 = \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}\Big):$$

$$\delta H = 0 = -2\nu K - \frac{1}{E}\left\{-\nu_{uu} - \nu_{vv}\right\},$$

oder, wenn wir beachten, daß $K = -\frac{1}{E^2}$

a') $$-2\nu \cdot \frac{1}{E} = \nu_{uu} + \nu_{vv}.$$

Die dritte Codazzische Gleichung (die beiden ersten sind von selbst erfüllt) wird hier:

c') $$\frac{1}{E} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u^2}.$$

Führen wir in a') und c') die Größe $E' = \frac{1}{E}$ ein, so erhalten wir genau die vorhin, bei Untersuchung der Kugel (p. 32) aufgestellten Gleichungen a) und c) (wobei k^2 dort gleich 1 zu setzen ist). Beachten wir die dort erhaltenen Resultate, so können wir unmittelbar aussprechen:

Wir erhalten sämtliche Deformationen einer auf das Isothermensystem ihrer Krümmungslinien bezogenen Minimalfläche, für welche $\delta H = 0$ wird, wenn wir für λ und μ beliebige Funktionen von u und v setzen, ferner:

$$\nu = i(f' - g')\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\frac{1}{E}} - (f' + g')\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\frac{1}{E}} - (f'' + g''),$$

wo f eine beliebige Funktion von $(u + iv)$ allein, g eine solche von $(u - iv)$ allein, die Akzente an f und g die Differentiation nach dem Argumente bedeuten.

Ferner zeigt sich, daß zu jeder isometrischen Deformation der auf ein Isothermensystem bezogenen Einheitskugel mit der Fundamentalgröße 1. Ordnung E eine Deformation längs der Normalen mit $\delta H = 0$ einer auf das Isothermensystem ihrer Krümmungslinien bezogenen Minimal-

fläche mit den Fundamentalgrößen $E' = G' = \frac{1}{E}$; $D = -1$; $D'' = +1$ gehört.

Ebenso gelingt es nun, alle diejenigen Deformationen der Kugel anzugeben, für welche $\delta K = 0$ ist. Betrachten wir nämlich die Gleichung 4) des § 2, so wird diese für die Kugel ($E = G$, $F = 0$, $D' = 0$, $D = D'' = kE$, wo $k^2 = \text{const.}$ das Krümmungsmaß):

a'') $$\nu_{uu} + \nu_{vv} = -2\nu k^2 E,$$

welches dieselbe Differentialgleichung ist, wie die oben aufgestellte a). Hiebei muß E der dritten Codazzischen Gleichung

c) $$-k^2 E = \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}}{\partial v^2}$$

genügen, so daß nach dem oben aufgestellten Satze sich als Lösung von a'') ergibt:

b) $$\nu = i(f' - g')\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - (f' + g')\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial u} - (f'' + g''),$$

wo f und g die gleiche Bedeutung wie oben haben. Damit sind alle Deformationen der Kugel längs der Normalen, welche δK verschwinden lassen, bekannt. Sämtliche Deformationen überhaupt, die dies bewirken, erhält man (gemäß 4) in § 2), wenn man noch für λ und μ zwei beliebige Funktionen von u und v setzt.

Betrachten wir die Formel 5) des § 2 für die Kugel, und fragen nach denjenigen ihrer Deformationen, welche δH verschwinden lassen, so gelangen wir wieder zu Gleichung a) und damit zu dem Satze, daß bei der Kugel $\delta K = 0$ auch stets $\delta H = 0$ nach sich zieht und v. v., woraus die Eigenschaft der Kugel, eine Grenzfläche zu sein, von neuem hervorgeht. —

Untersuchen wir fernerhin den Fall, wo sich die gegebene und deformierte Fläche durch infinitesimalen Parallelismus der Tangentenebenen entsprechen*). Dann muß $\delta X = \delta Y = \delta Z = 0$ werden, was gemäß Gleichung 13) (§ 3) $U = V = 0$ im Gefolge hat. Nach 12) (§ 3) wird also hier:

$$\lambda = \frac{\nu_u D'' - \nu_v D'}{K \Delta^2}; \quad \mu = \frac{\nu_v D - \nu_u D'}{K \Delta^2}.$$

Stellen wir dann mittels 15) δK in U, V dar, so kommt:

$$\delta K = \frac{1}{\Delta^2}(2FQ - RE - PG) + \frac{1}{\Delta^2}\Big\{[DV_v + D''U_u - D'(V_u + U_v)] - U(AD'' + CD - 2BD') - V(A_1 D'' + C_1 D - 2B_1 D')\Big\},$$

dann ergibt sich für die genannte Art der Deformation die Variation der Gauss'schen Krümmung sehr einfach:

$$\delta K = -\frac{\delta \Delta}{\Delta},$$

d. h. gleich der negativen Variation des Logarithmus des Flächeninhaltes des Parallelogrammes der Parameterlinien.

Ferner ergibt Formel 17):

$$\delta H = \frac{1}{\Delta^2}(PD'' + RD - 2QD') - H\frac{\delta \Delta}{\Delta}.$$

Betrachten wir hier den Fall der isometrischen Deformation, dann liefert die partielle Differentialgleichung 16) für φ, wenn $U = V = 0$ stattfindet (wobei zunächst der Fall $H = 0$ ausgeschlossen sei):

$$\varphi = 0.$$

Da nun, wie die Gleichungen 15) zeigen, eine Deformation mit $P = Q = R = \varphi = 0$ bewirkt, daß die defor-

*) Ribaucour l. c., p. 242.

mierte Fläche mit der ursprünglichen infinitesimal kongruent ist, so können wir aussprechen: Wird eine Fläche derart isometrisch deformiert, daß ihr die deformierte Fläche mittels infinitesimaler Parallelität der Tangentenebenen entspricht, dann sind die beiden Flächen infinitesimal kongruent.

Drücken wir gemäß 12) U und V in P, Q, R, φ aus, dann ergibt sich aus $U = V = 0$:

$$20) \qquad \varphi_u = \frac{S}{\Delta}; \quad \varphi_v = -\frac{T}{\Delta}.$$

Setzen wir außerdem $U = V = 0$ in Gleichung 16) ein, so kommt:

$$21) \qquad \varphi = \frac{1}{H\Delta^3} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix}.$$

Alle P, Q, R, welche den Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen 20) und 21) genügen, bewirken eine der behandelten Deformationen. Das zugehörige φ ergibt sich dann aus Gleichung 21).

Wir zeigen nun, daß die Bestimmung aller P, Q, R, welche eine solche Deformation bewirken (und damit auch der zugehörigen Werte von φ) lediglich die Lösung einer linearen partiellen Differentialgleichung, sowie Quadraturen bedingt (wobei wir die Minimalflächen ausschließen).

Die Bedingungen der Verträglichkeit der Gleichungen 20) und 21) lauten:

$$\frac{S}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{H\Delta^3} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix}$$

$$-\frac{T}{\Delta} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{H\Delta^3} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix}.$$

Denken wir uns jetzt die Fläche auf Minimalkurven als Parameterlinien gebracht, dann werden die beiden Bedingungen nach einiger Umformung:

$$22) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q}{F}\right) &= \frac{P_v}{F} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R\,D - P\,D''}{D'\,F}\right) \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Q}{F}\right) &= \frac{R_u}{F} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R\,D - P\,D''}{D'\,F}\right). \end{aligned}$$

Stellen wir hiefür die Integrabilitätsbedingung auf, so kommt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R\,D}{F\,D'}\right) - \frac{R_u}{F}\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{P\,D''}{F\,D'}\right) - \frac{P_v}{F}\right].$$

Wählen wir hier für P eine willkürliche Funktion von u und v, setzen die rechte Seite der Gleichung gleich f (P) und integrieren sie nach u, so kommt:

$$23) \quad R_v \frac{D}{F\,D'} - R_u \cdot \frac{1}{F} = R\,\frac{(D D' F)_v - 2\,F\,D' D_v}{F^2\,D'^2} + \int f(P)\,du + V,$$

wo V eine willkürliche Funktion von v allein bedeutet. Nach Lösung dieser linearen partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung für R erhalten wir Q durch Quadratur aus 22).

Bei den Minimalflächen, die wir vorhin ausschließen mußten, haben wir gemäß der Gleichungen 16) und 20) für die P, Q, R die beiden Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{S}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{T}{\Delta}\right) = 0$$

$$24) \qquad \begin{vmatrix} P & Q & R \\ D & D' & D'' \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0.$$

Ist die Minimalfläche auf Minimalkurven bezogen, so werden diese:

$$2\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{Q}{F}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P_v}{F}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_u}{F}\right)=0$$

$$R=P\cdot\frac{D''}{D'}.$$

Setzen wir die zweite in die erste ein, so ergibt sich, wenn wir wieder für P eine willkürliche Funktion von u und v wählen, Q durch zwei Quadraturen. Ebenso ergibt sich φ aus 20) durch Quadratur. Wir können sagen: Alle P, Q, R, φ, die bei einer Minimalfläche eine Deformation mit infinitesimaler Parallelität der Tangentenebenen bewirken, lassen sich durch Quadraturen bestimmen.

Suchen wir insbesondere diejenigen Deformationen mit infinitesimaler Parallelität der Tangentenebenen, welche zugleich konforme Deformationen ($P=\lambda E$; $Q=\lambda F$; $R=\lambda G$) sind, so ergibt sich, wenn wir zunächst die Minimalflächen ausschließen, aus den Gleichungen 20) und 21) (falls die Fläche auf Minimalkurven bezogen ist):

$$\varphi_u=-\frac{\lambda_u}{i}=0;\quad \varphi_v=-\frac{\lambda_v}{i}=0,$$

d. h. der triviale Fall, wo $\lambda=\text{const}$.

Bei den Minimalflächen dagegen ergibt die erste Gleichung 24) (die zweite ist von selbst erfüllt):

$$\frac{\partial}{\partial u}\lambda_v+\frac{\partial}{\partial v}\lambda_u=0,$$

d. h. $\lambda=U+V$, wo U, V beliebige Funktionen von u, resp. v allein sind. Wir haben den Satz:

Die einzigen infinitesimalen Deformationen einer Fläche, die zugleich die Richtung der Flächennormalen infinitesimal bewahren, und konforme Deformationen sind, stellen sich dar als diejenigen, bei denen der Konformitätsfaktor

$\lambda = \text{const.}$ ist; nur bei den Minimalflächen kann λ die Form $U + V$ haben.

Soll eine Deformation eine infinitesimal flächentreue sein, so ist:

$$\delta(\Delta) = \frac{1}{\Delta}(PG + RE - 2FQ)$$

gleich Null zu setzen. Verlangen wir dann, daß bei der Deformation der Flächeninhalt sowohl der Fläche, als auch der ihres sphärischen Bildes infinitesimal erhalten bleibe*), so ergibt das die beiden Forderungen $\delta K = \delta \Delta = 0$. Es zerfällt also Formel 11) (§ 3) in zwei Bedingungen:

$\alpha)$ $$ER + GP - 2FQ = 0$$

$\beta)$ $$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{T}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{S}{\Delta}\right) = 0.$$

Da nun, falls zwei Flächen in der verlangten Beziehung stehen, auch alle ihre Verbiegungen in dieser Beziehung stehen, so würde die vollständige Lösung der Aufgabe, die Deformationen sämtlich anzugeben, erreicht sein, wenn wir aus den beiden Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$ die P, Q, R als Funktionen der E, F, G bestimmt haben. Es können dann die Linienelemente aller derartiger aus einer Fläche durch infinitesimale Deformation hervorgehender Flächen angeschrieben werden.

Denken wir uns die Fläche auf ein Isothermensystem bezogen ($ds^2 = E(du^2 + dv^2)$), so gelingt die vollständige Lösung der Aufgabe. In der Tat wird in diesem Falle die Bedingung $\alpha)$:

$\alpha')$ $$P = -R.$$

Mit Benutzung derselben zerfällt die Bedingung $\beta)$ in die beiden Gleichungen:

---

*) Ribaucour l. c. p. 244.

$$Q_u + R_v = -\Phi_u E$$
$$Q_v - R_u = \Phi_v E.$$

Durch Differenzieren und Zusammenfassen trennen sich die Variabeln, und wir erhalten:

$$R_{vv} + R_{uu} = -\frac{\partial}{\partial u}(\Phi_v E) - \frac{\partial}{\partial v}(\Phi_u E) = M(u, v)$$
β′)
$$Q_{vv} + Q_{uu} = \frac{\partial}{\partial v}(\Phi_v E) - \frac{\partial}{\partial u}(\Phi_u E) = N(u, v).$$

wo Φ eine beliebige Funktion von u und v bedeutet. Durch Einführung neuer Variabler lassen sich die Gleichungen β′) auf die Form:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \bar{u}\, \partial \bar{v}} = M(\bar{u}, \bar{v})$$

bringen, welche durch Quadraturen lösbar ist. Wir haben den Satz:

Ist auf einer Fläche ein Isothermensystem gegeben, so lassen sich die Linienelemente aller derjenigen durch infinitesimale Deformation aus ihr hervorgehenden Flächen, welche mit ihr das Krümmungsmaß, sowie die Flächeninhalte der infinitesimalen Parallelogramme der Parameterlinien infinitesimal gleich haben, durch Quadraturen bestimmen.

Um die Flächen selbst zu erhalten, bedarf es der Bestimmung aller Flächen, welche das betreffende Linienelement besitzen. Ein anderer Weg hiezu wäre, nach Bestimmung der P, Q, R, die Auflösung der Gleichung 16) nach φ, worauf mittels 15) die Flächen aus ihren 6 Fundamentalgrößen zu ermitteln wären, wie das eingangs dieses § ausgeführt wurde. —

§ 5 Die Kurven ohne Verschiebung bei isometrischer Deformation.

Voss*) hat die »Kurven ohne Verschiebung« sowie deren orthogonale Trajektorien, die »Verschiebungskurven« eingeführt. Die Kurven ohne Verschiebung werden gebildet durch diejenige einfach unendliche Kurvenschar auf der zu deformierenden Fläche, deren Tangenten auf dem Verschiebungsvektor senkrecht stehen; die Tangenten der Verschiebungskurven fallen zusammen mit der orthogonalen Projektion des Vektors auf die zugehörige Tangentenebene der Fläche. Wir können das so erhaltene orthogonale Kurvensystem — das wir kurz als »Deformationssystem« bezeichnen wollen — auf der Fläche als Parametersystem einführen, indem wir etwa festsetzen, daß die Kurven $u = \text{const.}$ die Kurven ohne Verschiebung darstellen sollen. Dann wird $F = 0$, sowie $\mu = 0$, da die Verschiebungskomponente in Richtung der v-Kurven ($u = \text{const.}$) zu Null wird.

Es werden dann die Gleichungen 1) des § 2:

$$1) \qquad \begin{aligned} \delta E &= \lambda E_u + 2\lambda_u E - 2\nu D = 2P \\ \delta F &= \lambda_v E - 2\nu D' = 2Q \\ \delta G &= \lambda G_u - 2\nu D'' = 2R. \end{aligned}$$

Betrachten wir hier zunächst die isometrische Deformation mit $P = Q = R = 0$. Wir eliminieren ν und erhalten:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \frac{G_u D - E_u D''}{2 E D''}$$

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = \frac{D' G_u}{E D''},$$

wodurch sich als Bedingung ergibt, daß das Parametersystem von der verlangten Art sei:

*) 1904, p. 191.

2) $$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{G_u D - E_u D''}{E D''}\right) = 2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D' G_u}{E D''}\right),$$

welche sich aus der von Voss aufgestellten*):

2a) $$\frac{\partial}{\partial v}\left(A - C\frac{D}{D''}\right) = 2\frac{\partial}{\partial u}\left(B - C\frac{D'}{D''}\right)$$

für $F = 0$ ergibt.

Die Bedingung 2) versagt, falls $E = 0$, d. h. für die Tangentenflächen der Minimalkurven, sowie, wenn $D'' = 0$ ist, was wegen $G_u = 0$ (nach 1) auf die Regelflächen führt**).

Sollen $v = \text{const.}$ die Kurven ohne Verschiebung sein, so kommt aus 2) durch Vertauschung von u und v die Bedingung:

3) $$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{E_v D'' G_v D}{G D}\right) = 2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D' E_v}{G D}\right).$$

2) und 3) zusammen liefern dann die Bedingungen dafür, daß beide Scharen des orthogonalen Parametersystems Kurven ohne Verschiebung bei isometrischer Deformation sein können. So wählt 3) z. B. unter den Flächen, bei denen eine Schar von Krümmungslinien Kurven ohne Verschiebung sein können, eine speziellere Klasse aus, auf denen beide Scharen diesen Charakter haben. In diesem letzteren Falle werden die Bedingungen 2) und 3):

4) $$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{G_u D}{E D''}\right) = \frac{\partial^2 \log E}{\partial u\, \partial v};\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{E_v D''}{G D}\right) = \frac{\partial^2 \log G}{\partial u\, \partial v}.$$

Die beiden Gleichungen 4) sind identisch erfüllt im Falle der Kugel ($E = G$, $D = D''$); d. h. auf der Kugel kann jede Schar von Kurven, welche geeignet ist, eine Schar eines isothermen Systems zu bilden, die Kurven ohne Verschiebung bei einer isometrischen Deformation sein. Die Gleichungen

*) 1904, pag. 191.

**) Voss 1904, pag. 192.

zeigen zugleich, daß dies sämtliche Kurven ohne Verschiebung bei der Kugel sind *).

Betrachten wir die Gleichungen 4) im Falle der Minimalflächen ($E = G$, $D = -1$, $D'' = +1$), so ergibt sich, daß, wenn auf einer Minimalfläche die eine Schar von Krümmungslinien die Kurven ohne Verschiebung bilden kann, dies auch stets bei der anderen Schar der Fall ist. Fragen wir also, bei welchen Minimalflächen das System der Krümmungslinien Deformationssystem bei einer isometrischen Deformation sein kann, so finden wir (wenn $E = G$, $D = -a$, $D'' = +a$, wo a eine Konstante) aus 4) die Bedingung:

$$\frac{\partial^2 \log E}{\partial u \, \partial v} = 0,$$

also $E = e^{U+V}$. Die beiden ersten Codazzischen Gleichungen sind dann von selbst erfüllt, aus der dritten kommt als Bedingung für E:

$$2 a^2 e^{-(U+V)} = V_{vv} + U_{uu}.$$

Durch Differentiation erkennt man, daß E nur eine Funktion von u allein, oder eine solche von v allein sein kann. Es können also diese Flächen nur Rotationsflächen sein. Prüfen wir die Minimalrotationsfläche:

$$x = \frac{a}{2}(e^u + e^{-u}) \cos v; \quad y = \frac{a}{2}(e^u + e^{-u}) \sin v; \quad z = au$$

in diesem Sinne, wobei:

$$E = \frac{a^2}{4}(e^u + e^{-u})^2 = G; \quad F = 0; \quad D = -a; \quad D' = 0; \quad D'' = +a,$$

so finden wir, daß diese in der Tat allen Bedingungen genügt. Wir haben den Satz:

Die einzigen Minimalflächen, auf denen die Krümmungslinien das Deformationssystem bilden

*) Voss 1904, p. 193.

können, sind diejenigen, welche zugleich Rotationsflächen sind, d. h. die Katenoide; und zwar kann bei ihnen jede Schar der Krümmungslinien die Kurven ohne Verschiebung bilden.

Zu den Flächen, auf welchen jede Schar der Krümmungslinien Kurven ohne Verschiebung sein können, gehören überhaupt alle Rotationsflächen, wie dies die Bedingungen 2) und 3) sofort zeigen.

Betrachten wir schließlich noch diejenigen Flächen, auf denen eine Schar von Minimalkurven die Kurven ohne Verschiebung bilden kann (was natürlich nur bei imaginärer Deformation stattfinden kann), so wird hier die Bedingung 2^a):

$$\frac{\partial \log F}{\partial u \, \partial v} = 0;$$

durch Einführung neuer Parameter kann also das Linienelement auf die Form

$$ds^2 = 2 \, du \, dv$$

gebracht werden, so daß wir haben:

Nur auf den abwickelbaren Flächen kann eine Schar von Minimalkurven die Kurven ohne Verschiebung bilden. —

Eine andere Art, die Deformationssysteme bei isometrischer Deformation zu charakterisieren, ergibt sich aus folgender Ueberlegung:

Setzten wir in den Gleichungen 1) des § 2 $\mu = 0$, so war λ überbestimmt, und es ergab sich eine Relation zwischen den Fundamentalgrößen, welche die Deformationssysteme der Flächen bei isometrischer Deformation charakterisierte. Eine analoge Relation erhalten wir, wenn wir in denselben Gleichungen $\lambda = \mu$ setzen. Geometrisch bedeutet dies, daß das Deformationssystem durch das System der Diagonalkurven der Parameterkurven gebildet wird. Die Gleichungen 1) des § 2 werden dann:

$$
\begin{aligned}
&\lambda(E_u + E_v) + 2\lambda_u(E + F) = 2\nu D\\
4') \qquad &\lambda(F_u + F_v) + \lambda_u(F + G) + \lambda_v(E + F) = 2\nu D'\\
&\lambda(G_u + G_v) + 2\lambda_v(F + G) = 2\nu D''.
\end{aligned}
$$

Subtrahieren wir die mittlere dieser Gleichungen von der vereinigten ersten und dritten, und eliminieren mit dem Resultate ν, so erhalten wir für 4') die Integrabilitätsbedingung:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D(G' - 2F') - E'(D'' - 2D')}{(E + F)(D + D'' - 2D'}\right)\\
5) \qquad &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''(E' - 2F') - G'(D - 2D')}{(F + G)(D + D'' - 2D')}\right),
\end{aligned}
$$

wobei $E' = E_u + E_v$ und analog F' und G' gesetzt ist.

Führen wir in die Gleichungen 1) des § 2 die reduzierten Komponenten ρ und σ (§ 1) ein, so werden diese:

$$
\begin{aligned}
&\rho_u - \rho A - \sigma A_1 = \nu D + P\\
5') \qquad &\rho_v + \sigma_u - 2\rho D - 2\sigma B_1 = 2\nu D' + 2Q\\
&\sigma_v - \rho C - \sigma C_1 = \nu D'' + R.
\end{aligned}
$$

Setzen wir hier $\sigma = \rho$ und zur Abkürzung $A + A_1 = A'$ und analog B' und C', so kommt:

$$
\begin{aligned}
&\rho_u - \rho A' = \nu D\\
&\rho_u + \rho_v - 2\rho B' = 2\nu D'\\
&\rho_v - \rho C' = \nu D''.
\end{aligned}
$$

Auf die gleiche Weise wie oben erhalten wir hier die Integrabilitätsbedingung:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A'(D'' - 2D') - D(C - 2B')}{D + D'' - 2D'}\right)\\
6) \qquad &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C'(D - 2D') - D''(A' - 2B')}{D + D'' - 2D'}\right).
\end{aligned}
$$

Durch diese Bedingung sind alle Systeme von Para-

meterkurven charakterisiert, deren Diagonalkurvensystem Deformationssystem bei isometrischer Deformation sein kann.

Bedingung 5) ist z. B. erfüllt für $E = G = 0$; $F_u + F_v = 0$, also $F = f(u - v)$. Diesen Bedingungen genügt aber das Linienelement der auf ihre Minimalkurven bezogenen Rotationsflächen*). Ferner ist 5) erfüllt für $E' = F' = G' = 0$.

Wählen wir in 6) $D = D'' = 0$, so sind die Parameterlinien die Haupttangentenkurven, das Deformationssystem also die Krümmungslinien. Wir erhalten dann die Bedingung:

$$7) \qquad \frac{\partial}{\partial v}(A_1 + A) = \frac{\partial}{\partial u}(C_1 + C),$$

welche nur von den Fundamentalgrößen 1. Ordnung abhängt. Mit den ersten beiden Codazzischen Gleichungen und bekannten Beziehungen kommt hier:

$$8) \qquad \frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial C_1}{\partial u}; \quad \frac{\partial A_1}{\partial v} = \frac{\partial C}{\partial u}; \quad \frac{\partial B_1}{\partial v} = \frac{\partial B}{\partial u},$$

worauf nur noch die dritte Codazzische Gleichung zu erfüllen ist, nachdem D' durch eine Quadratur gefunden. —

§ 6. Die Kurven ohne Verschiebung bei der allgemeinen Deformation.

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung der Kurven ohne Verschiebung bei der allgemeinen Deformation (P, Q, R). Seien dann wieder $u = \text{const.}$ die Kurven ohne Verschiebung,

*) G. Scheffers, Anwendung der Diff. und Int.-rechn. auf Geometrie. Leipzig 1902. II. p. 291.

dann wird $\mu = 0$ und die Gleichungen 1) des § 2 werden (für $F = 0$):

$$\begin{aligned} &\lambda E_u + 2\lambda_u E = 2\nu D + 2P \\ 1) \qquad &\lambda_v E = 2\nu D' + 2Q \\ &\lambda G_u = 2\nu D'' + 2R. \end{aligned}$$

Eliminieren wir ν, so können wir diese Gleichungen auf die Form:

$$\begin{aligned} 2) \qquad \lambda_u &= \lambda \cdot M + N \\ \lambda_v &= \lambda \cdot m + n \end{aligned}$$

bringen, wo gesetzt ist:

$$\begin{aligned} 3) \qquad M &= \frac{D G_u - D'' E_u}{2 E D''}; \quad N = \frac{P D'' - R D}{E D''} \\ m &= \frac{D' G_u}{E D''} \quad ; \quad n = 2\frac{Q D'' - R D'}{E D''}. \end{aligned}$$

Um die Integrabilitätsbedingungen von 2) aufzustellen, differentieren wir die erste Gleichung 2) nach v, die zweite nach u, und setzen die beiden rechten Seiten einander gleich, indem wir λ_u und λ_v durch ihre Werte aus 2) ersetzen.

Wir erhalten:

$$4) \qquad \lambda (M_v - m_u) + (Mn - Nm + N_v - n_u) = 0.$$

Im Falle unbeschränkter Integrabilität erhalten wir hieraus die beiden Bedingungen:

$$\begin{aligned} 5) \qquad \Phi &= M_v - m_u = 0 \\ \Psi &= Mn - Nm + N_v - n_u = 0. \end{aligned}$$

Anderenfalls ist:

$$\lambda = -\frac{\Psi}{\Phi}$$

die Lösung von 2) und damit sie bestehen kann, müssen für die Koeffizienten von 2) die beiden Bedingungen:

5')
$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Psi'}{\Phi}\right) - \frac{\Psi'}{\Phi} M + N$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Psi'}{\Phi}\right) - \frac{\Psi'}{\Phi} m + n$$

erfüllt sein.

Im Falle unbeschränkter Integrabilität kann man 2) leicht integrieren*). Wegen der ersten Gleichung 5) muß es eine Funktion w (u, v) geben, so daß:

6) $$w_u = M; \quad w_v = m.$$

Setzen wir dann, nachdem w aus 6) durch eine Quadratur bestimmt ist, in 2):

7) $$\lambda = \Omega \cdot e^w,$$

so kommt:

$$(\Omega e^w)_u = \Omega e^w w_u + N$$
$$(\Omega e^w)_v = \Omega e^w w_v + n,$$

woraus:

8) $$\Omega_u = \frac{N}{e^w}; \quad \Omega_v = \frac{n}{e^w},$$

wonach dann durch eine Quadratur Ω zu bestimmen ist. Die Integrabilitätsbedingung von 8) fällt dabei mit der zweiten Gleichung 5) zusammen.

Hiernach lauten bei unbeschränkter Integrabilität die Integrabilitätsbedingungen von 2) nach kleiner Umformung:

9)
$$\left(\frac{D G_u - D'' E_u}{2 E D''}\right)_v = \left(\frac{D' G_u}{E D''}\right)_u$$
$$\left(\frac{P D'' - R D}{E D''}\right)_v - 2\left(\frac{Q D'' - R D'}{E D''}\right)_u$$
$$= \frac{D'(P G_u - R E_u) + Q(D'' E_u - D G)_u}{E^2 D''}.$$

*) Lie-Scheffers »Vorlesungen über Differentialgleichungen etc.« Leipzig 1891, p. 182.

Geben wir hier den P, Q, R bestimmte Werte, so charakterisieren die Bedingungen 9) sowie die Bedingungen 5') alle Kurvensysteme der Fläche, welche Kurven ohne Verschiebung bei einer Deformation (P, Q, R) sein können.

Für die reduzierten Vektorkomponenten findet man die Bedingungen:

$$10)\quad \begin{aligned} &\left(A-\frac{D}{D''}C\right)_v = 2\left(B-\frac{D'}{D''}C\right)_u \\ &\left(P-\frac{D}{D''}R\right)_v - 2\left(Q-\frac{D'}{D''}R\right)_u \\ &+2\,\frac{Q(AD''-DC)+P(D'C-D''B)+R(DB-D'A)}{D''}=0, \end{aligned}$$

wo sich der Nenner des Bruches als Determinante schreiben läßt, woraus hervorgeht, daß die beiden Bedingungen für $P:Q:R=D:D':D''$ und $P:Q:R=A:B:C$ sich auf die erste reduzieren. Der erstere der beiden Fälle wurde schon früher behandelt*).

Die Bedingungen 9) und 10) versagen für $D''=0$. In diesem Falle erhalten wir aus den Gleichungen 1) die Bedingung:

$$11)\quad \left(\frac{R}{G_u}\right)_u \cdot 2D' - \left(\frac{R}{G_u}\right)_v \cdot D = \frac{1}{EG_u}(G_u(PD'-QD)-RD'E_u)$$

dafür, daß bei der Deformation P, Q, R die Haupttangentenkurven $u=$ const. die Kurven ohne Verschiebung sind. Gleichung 11) versagt für $G_u=0$, d. h. wenn die eine Schar der Haupttangentenkurven zugleich geodätisch ist, bei den Regelflächen.

Das gleiche Resultat liefert natürlich die zu 11) analoge Bedingung für die reduzierten Komponenten, wenn $D''=0$:

---

*) Voss 1904, p. 145.

$$12) \quad \left(\frac{R}{C}\right)_v \cdot D - \left(\frac{R}{C}\right) \cdot 2D' = \frac{1}{C}\Big[2R(BD - AD') + 2C(PD' - QD)\Big].$$

Die Gleichungen 1) zeigen, daß für $G_u = D'' = 0$ auch $R = 0$ sein muß, was den Satz liefert:

Eine Deformation der Regelflächen, bei der die Geraden die Kurven ohne Verschiebung sind, ist nur möglich, wenn $R = 0$. Speziell gibt es also bei den Regelflächen keine konforme Deformation, für welche die Geraden Kurven ohne Verschiebung sind.

Setzen wir in Gleichung 11) auch $D = 0$, so erhalten wir die Bedingung dafür, daß auf einer Minimalfläche das System der Haupttangentenkurven Deformationssystem bei einer Deformation P, Q, R sein kann:

$$14) \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R}{G_u}\right) = \frac{G_u P - E_u R}{2EG_u},$$

wobei die Kurven $u = \text{const.}$ die Kurven ohne Verschiebung sind. Sollen dagegen $v = \text{const.}$ diese Kurven sein, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{P}{E_v}\right) = \frac{RE_v - PG_v}{2GE_v}.$$

Eine partikuläre Lösung von 14) ergibt sich sofort als $R = G_u$; $P = E_u$.

Die allgemeine Bedingung für die Deformation P, Q, R, wenn die Fläche auf Haupttangentenkurven bezogen ist und $u = \text{const.}$ die Kurven ohne Verschiebung sein sollen, ist (aus 12):

$$15) \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R}{C}\right) = \frac{RA - PC}{C},$$

wo $P = A$, $R = C$ eine partikuläre Lösung ist.

Gehen wir allgemein zur konformen Deformation

über, dann werden die Bedingungen 9) für $P = \tau E$; $Q = 0$; $R = \tau G$:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D G_u - D'' E_u}{2 E D''}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D' G_u}{E D''}\right)$$

16)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\tau\frac{E D'' - G D}{E D''}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\tau\frac{2 G D'}{E D''}\right) = \tau \cdot \frac{D'}{D''}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{G}{E}\right).$$

Bedingung 2) verschwindet für die auf ein Isothermensystem bezogene Kugel identisch, d. h. auf der Kugel kann jedes Isothermensystem (und nur diese) Deformationssystem für jede konforme Deformation sein.

Für Krümmungskurven ($D' = 0$) wird die zweite Bedingung 16) zu:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\tau\frac{E D'' - G D}{E D''}\right) = 0,$$

so daß für Minimalflächen ($E = G$, $D = -1$, $D'' = +1$) der Satz kommt:

Bei den Minimalflächen können die Krümmungslinien $u = \text{const.}$ nur dann Kurven ohne Verschiebung bei konformer Deformation sein, wenn τ eine Funktion von u allein ist. —

---

§ 7. Die Differentialgleichungen der Deformationskurvensysteme und spezielle Flächendeformationen.

Um jetzt die geometrische Bedeutung der λ, μ und ρ, σ festzustellen, denken wir uns eine infinitesimale Deformation der Fläche. Zerlegen wir dann den Verschiebungsvektor r in einem Flächenpunkte nach dem Parallelepipedsatze in seine 3 Komponenten nach der Tangente an

die u-Parameterkurve, der an die v-Parameterkurve und der Normalen, so seien diese: $\varkappa_u$, $\varkappa_v$, $\varkappa_\nu$, welche noch mit einer infinitesimalen Größe zu multiplizieren wären. Für die Winkel a, b, c, welche r mit den Triederaxen (u-Tangente, v-Tangente, Normale) einschließt, ergibt sich dann, wenn der Winkel der Parameterlinien ω genannt wird (so daß $\cos\omega = -\frac{F}{\sqrt{EG}}$):

$$1)\qquad \cos a = \frac{\varkappa_u \sqrt{EG} + \varkappa_v \cdot F}{r\sqrt{EG}};\quad \cos b = \frac{\varkappa_v \sqrt{EG} + \varkappa_u F}{r\sqrt{EG}};$$
$$\cos c = \frac{\varkappa_\nu}{r}.$$

Seien ferner die Winkel, welche r mit den Koordinatenaxen (x, y, z) einschließt resp. α, β, γ, so haben wir zu deren Bestimmung die Gleichungen:

$$\cos a = \frac{x_u}{\sqrt{E}}\cos\alpha + \frac{y_u}{\sqrt{E}}\cos\beta + \frac{z_u}{\sqrt{E}}\cos\gamma$$
$$2)\qquad \cos b = \frac{x_v}{\sqrt{G}}\cos\alpha + \frac{y_v}{\sqrt{G}}\cos\beta + \frac{z_v}{\sqrt{G}}\cos\gamma$$
$$\cos c = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma,$$

woraus unter Benutzung von 1):

$$3)\qquad \cos\alpha = x_u\frac{\varkappa_u}{r\sqrt{E}} + x_v\frac{\varkappa_v}{r\sqrt{G}} + X\frac{\varkappa_\nu}{r},$$

sowie zwei analoge Gleichungen für $\cos\beta$, $\cos\gamma$, welche sich durch Vertauschen von x mit y und x mit z aus 3) ergeben.

Setzen wir dann:

$$4)\qquad \frac{\varkappa_u}{\sqrt{E}} = \lambda;\quad \frac{\varkappa_v}{\sqrt{G}} = \mu;\quad \varkappa_\nu = \nu,$$

so kommt:

$$\xi = r\cos\alpha = \lambda x_u + \mu x_v + \nu X$$

5) $$\eta = r\cos\beta = \lambda y_u + \mu y_v + \nu Y$$

$$\zeta = r\cos\gamma = \lambda z_u + \mu z_v + \nu Z,$$

welche Gleichungen mit den Gleichungen 8) des § 1 übereinstimmen.

Schreiten wir dann von einem Punkte (u, v) längs der Verschiebungskurve fort zu dem Punkte $(u + du,\ v + dv)$ so ist das dasselbe, wie wenn der Punkt nacheinander auf der u- und v-Parameterkurve die Bogenelemente:

$$d_u s = du \cdot \sqrt{E} = \varkappa_u; \quad d_v s = dv \cdot \sqrt{G} = \varkappa_v$$

zurückgelegt hätte. Es ist also die Differentialgleichung der Verschiebungskurven:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\varkappa_u}{\sqrt{E}} : \frac{\varkappa_v}{\sqrt{G}} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Als Differentialgleichung ihrer orthogonalen Trajektorien, d. h. der Kurven ohne Verschiebung finden wir:

$$(E\lambda + \mu F)\,du + (\lambda F + \mu G)\,dv = 0,$$

oder:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\lambda F + \mu G}{\lambda E + \mu F} = -\frac{\sigma}{\rho},$$

so daß wir haben:

Die Differentialgleichung der Verschiebungskurven, sowie der Kurven ohne Verschiebung ist resp.:

6) $$\frac{dv}{du} = \frac{\mu}{\lambda}; \quad \frac{dv}{du} = -\frac{\rho}{\sigma}.$$

Denken wir uns nun die Fläche auf Haupttangentenkurven bezogen, und betrachten wir die isometrische Deformation, so werden die Gleichungen 5') des § 5:

$$7) \qquad \begin{aligned} \rho_u - \rho A - \sigma A_1 &= 0 \\ \sigma_v - \rho C - \sigma C_1 &= 0, \end{aligned}$$

während eine dritte Gleichung ν liefert.

Setzen wir dann: $\frac{\rho}{\sigma} = \tau$, also $\rho = \tau\sigma$, so kommt aus 7):

$$8) \qquad \begin{aligned} \frac{\sigma_u}{\sigma} &= A + \frac{A_1}{\tau} - \frac{\tau_u}{\tau} \\ \frac{\sigma_v}{\sigma} &= C_1 + \tau C. \end{aligned}$$

Durch Aufstellung der Integrabilitätsbedingung kommt:

$$9) \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(A + \frac{A_1}{\tau} - \frac{\tau_u}{\tau}\right) = \frac{\partial}{\partial u}(C_1 + \tau C),$$

was eine Differentialgleichung für τ liefert, nach deren Auflösung wir in:

$$\frac{dv}{du} = -\tau$$

die Gleichung des Systems der Kurven ohne Verschiebnng bei isometrischer Deformation gewinnen.

Nach Lösung von 9) bedarf die vollständige Lösung von 7) d. h. des Problems der isometrischen Deformation nur noch einer Quadratur, um σ aus 8) zu erhalten, worauf auch $\rho = \tau\sigma$ bekannt ist.

Voss*) hat gezeigt, daß die Kurven ohne Verschiebung bei allen projektiven Transformationen einer Fläche invariant bleiben. Wir wollen für die Gleichung 9) diesen Nachweis führen. Setzen wir die zur projektiv transformierten Fläche gehörigen Größen in Klammern, dann sind nach den l. c. angegebenen Formeln:

*) 1904, p. 195 ff.

$$(A) = A - 2\frac{\partial \log t}{\partial u} \qquad (A_1) = A_1$$

$$(C) = C \qquad (C_1) = C_1 - 2\frac{\partial \log t}{\partial v}$$

die benötigten Christoffelschen Koeffizienten der transformierten Fläche, wobei die Ausgangsfläche auf Haupttangentenkurven bezogen ist, und t den gemeinsamen Nenner der projektiven Transformation darstellt. Es wird also Gleichung 9) für die transformierte Fläche:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(A - 2\frac{\partial \log t}{\partial u} + \frac{A_1}{\tau} - \frac{\tau_u}{\tau}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(C_1 - 2\frac{\partial \log t}{\partial v} + \tau C\right),$$

welche, wie verlangt, mit der Gleichung 9) identisch ist.

Für die Kugel ($E = G = D = D'' = 0$) kommt z. B. aus Gleichung 9):

$$\frac{\partial^2 \log \tau}{\partial u \, \partial v} = 0,$$

also $\tau = U \cdot V$; so daß ihre Kurven ohne Verschiebung gegeben sind durch den Ausdruck (wenn $U_1 = U^{-1}$):

$$\int \frac{dv}{V} + \int \frac{du}{U_1} = \text{const.}$$

Einfachere Fälle der Gleichung 9) überhaupt ergeben sich, wenn $A_1 = 0$, d. h. da die Fläche auf Haupttangentenkurven bezogen ist, für die Regelflächen. Betrachten wir die Flächen 2. Ordnung, so ist außerdem $C = 0$.

Wir wollen diese beiden Flächengattungen im Folgenden noch behandeln, indem wir ihre infinitesimalen isometrischen Deformationen explizit aufstellen. Nach früheren Methoden ist dies für die Flächen 2. Ordnung von Daniële*) bereits ausgeführt worden, hier wollen wir uns der im Vorstehenden benutzten Mittel bedienen.

Zunächst seien die Regelflächen behandelt. Ihre

*) Atti di Torino l. c.

Deformation hat Voss*) allgemein bestimmt. Wir wollen sie kurz angeben:

Seien die Flächen auf Haupttangentenkurven bezogen, so werden die Gleichungen 5') des § 5:

$$\rho_u - \rho A - \sigma \Lambda_1 = P$$
$$\rho_v + \sigma_u - 2\rho B - 2\sigma B_1 - 2\nu D' = 2Q$$
$$\sigma_v - \rho C - \sigma C_1 = R.$$

Dann wird bei Regelflächen $A_1 = 0$. Wegen der Gleichungen:

$$A + B_1 = \frac{\partial \log \Delta}{\partial u}; \quad B + C_1 = \frac{\partial \log \Delta}{\partial v},$$

sowie den beiden ersten Codazzischen Gleichungen:

$$A - B_1 = \frac{\partial \log D'}{\partial u}; \quad C_1 - B = \frac{\partial \log D'}{\partial v}$$

kommt:

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial \log (\Delta D')}{\partial u}; \quad B_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \left(\frac{D'}{\Delta}\right)}{\partial u}$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \log (\Delta D')}{\partial v}; \quad B = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log \left(\frac{D'}{\Delta}\right)}{\partial v}.$$

Setzen wir nunmehr:

$$\sqrt{\Delta D'} = \Theta; \quad \frac{D'}{\Delta} = \Pi,$$

so werden die Gleichungen:

$$\Theta \rho_u - \rho \Theta_u = P\Theta$$
$$\rho_v \Pi + \sigma_u \Pi + \rho \Pi_v + \sigma \Pi_u - 2\nu D' \Pi = 2Q\Pi$$
$$\sigma_v \Theta - \rho C \Theta - \sigma \Theta_v = R\Theta.$$

*) 1904, p. 189.

Die erste und letzte dieser Gleichungen geben unmittelbar:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\rho}{\Theta}\right) = \frac{P}{\Theta}, \text{ also: } \rho = \Theta \int \frac{P}{\Theta} du + V \cdot \Theta$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sigma}{\Theta}\right) = \frac{R + \rho C}{\Theta}, \text{ also: } \sigma = \Theta\left[\int \frac{R + \rho C}{\Theta} dv + U\right].$$

Also für isometrische Deformation:

$$\rho = V \cdot \Theta$$

$$\sigma = \Theta \int C \cdot V \cdot dv + U \cdot \Theta$$

$$\nu = \frac{1}{2 D' \Pi}\left\{\frac{\partial}{\partial v}(\Pi \Theta V) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\Pi \Theta \int C V dv + U \Pi \Theta\right)\right\}.$$

Insbesondere gelangen wir so zu den Regelflächen 2. Grades. Hier ist außerdem $C = 0$, so daß kommt:

$$\rho = \Theta V$$

$$\sigma = \Theta U$$

$$\nu = \frac{1}{2 D' \Pi}\left\{\frac{\partial}{\partial v}(\Pi \Theta V) + \frac{\partial}{\partial u}(\Pi \Theta U)\right\}.$$

Man erkennt, daß sich hier alle Kurven ohne Verschiebung sofort angeben lassen. Es wird gemäß dem Obigen:

$$\int \frac{du}{U} + \int \frac{dv}{V} = \text{const.}$$

die Gleichung derselben.

So kommt z. B. beim hyperbolischen Paraboloid:

$$x = u; \quad y = v; \quad z = uv$$

$$E = 1 + v^2; \quad F = uv; \quad G = 1 + u^2; \quad \Delta^2 = 1 + u^2 + v^2$$

$$D = D'' = 0; \quad D' = \frac{1}{\Delta},$$

bei isometrischer Deformation:

$$\rho = U$$

$$\sigma = V$$

$$\nu = \frac{\Delta^2}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{\Delta}\right)\right\}.$$

Um allgemein die Flächen 2. Grades zu behandeln, betrachten wir das Ellipsoid:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

oder:

$$x = a\frac{u+v}{uv+1};\quad y = -ib\frac{u-v}{uv+1};\quad z = c\frac{uv-1}{uv+1}.$$

Setzen wir: $uv + 1 = \alpha$, so wird:

$$E = \frac{1}{\alpha^4}\left\{a^2(1-v^2)^2 - b^2(1+v^2)^2 + c^2 \cdot 4v^2\right\}$$

$$F = \frac{1}{\alpha^4}\left\{a^2(1-v^2)(1-u^2) + b^2(1+v^2)(1+u^2) + c^2 \cdot 4uv\right\}$$

$$G = \frac{1}{\alpha^4}\left\{a^2(1-u^2)^2 - b^2(1+u^2)^2 + c^2 \cdot 4u^2\right\}$$

$$\Delta^2 = \frac{4}{\alpha^6}\left\{a^2c^2(u-v)^2 - a^2b^2(1-uv)^2 - b^2c^2(u+v)^2\right\}$$

$$D = D'' = 0;\quad \Delta D' = \frac{4i}{\alpha^4} \cdot abc.$$

Dann wird:

$$\Theta = \frac{2}{\alpha^2}\sqrt{i \cdot abc};\quad \Pi = \frac{4iabc}{\alpha^4 \cdot \Delta^2},$$

so daß wir für die isometrische Deformation erhalten:

$$\rho = V \cdot \frac{2}{\alpha^2}\sqrt{i \cdot abc}$$

$$\sigma = U \cdot \frac{2}{\alpha^2}\sqrt{i \cdot abc}$$

$$\nu = -\frac{\Delta^3 \alpha^8 i \sqrt{i\,a\,b\,c}}{4\,a\,b\,c}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{\alpha^6 \Delta^2}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{\alpha^6 \Delta^2}\right)\right\}.$$

Aus den angeschriebenen Formeln erhalten wir dann die entsprechenden für die übrigen Flächen 2. Grades, wenn wir setzen:

$a = b = c = r$ für die Kugel,

$a = a'$; $b = b'$; $c = ic'$ für das einschalige, und

$a = ia'$; $b = ib'$; $c = c'$ für das zweischalige Hyperboloid. —

Lebenslauf.

Ich, Hugo Albert Dingler, geboren am 7. Juli 1881 zu München, Sohn des k. o. Professors der Botanik an der Forstlichen Hochschule zu Aschaffenburg Dr. Herrmann Dingler und dessen Ehefrau Marie, geb. Erlenmeyer, erhielt meine Schulbildung zuerst in München, dann in Aschaffenburg, woselbst ich das k. hum. Gymnasium im Sommer 1900 absolvierte. Ich besuchte dann die Universitäten: 1900—01 Erlangen, 1901—02 München, 1902—03 Göttingen, 1903—04 wieder München, woselbst ich im Herbste 1904 das Lehramtsexamen für Mathematik und Physik bestand. Nachdem ich ein halbes Jahr in Privatstellung tätig gewesen, widmete ich mich in Aschaffenburg, sowie während des Sommers 1906 in Göttingen meinen Studien. Ich besuchte die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren und Dozenten:

Abraham, Bauer, Conrad, Doehlemann, v. Dyck, Finsterwalder, Hilbert, Husserl, Kaufmann, F. Klein, Lindemann, Muncker, Minkowski, Noether, Peter, Riecke, Roentgen, Rothpletz, Schwarzschild, Voigt, Voss, Wiedemann.

Allen diesen meinen Lehrern, insbesondere Herrn Professor Voss, fühle ich mich zu großem Danke verpflichtet. Ebenso auch Herrn Professor Dr. L. Schleiermacher in Aschaffenburg, der von jeher durch freundlichen Rat und zur Verfügungstellen von Literatur meine Studien unterstützte.